Preview Kalkulus

Tujuan Instruksional Khusus

Mahasiswa mampu:

- menyebutkan konsep-konsep utama dalam kalkulus dan contoh masalah-masalah yang memotivasi konsep tersebut;
- menjelaskan menyebutkan konsep-konsep utama dalam kalkulus dan contoh sifat-sifat bilangan real, pengertian harga mutlak, dan menyelesaikan pertaksamaan tanpa atau dengan melibatkan harga mutlak;
- menggunakan lambang fungsi serta konsep peubah bebas dan tak bebas untuk mengungkapkan atau memodelkan suatu situasi nyata serta menjelaskan makna setiap suku dalam ekspresi fungsi tersebut;
- menggambar sketsa grafik fungsi secara manual, dan memvisualisasikan grafik fungsi dengan bantuan TIK;
- membentuk dan menginterpretasikan fungsi baru hasil operasi aljabar terhadap fungsi-fungsi yang diberikan;
- mengidentifikasi fungsi-fungsi khusus (linear, polinom, aljabar, rasional, trigonometri)
- menaksir nilai limit menggunakan grafik fungsi, tabel, atau secara numerik dan mengenali situasi di mana limit tidak ada;
- menggunakan aturan-aturan menghitung limit;
- menggunakan kosep limit untuk menentukan apakah suatu fungsi kontinu.

Topik-topik Pembahasan

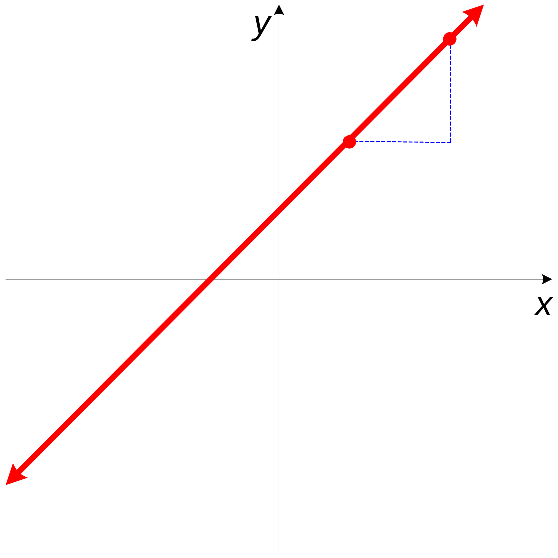
- Apakah kalkulus itu?
- Pendahuluan: bilangan real dan nilai mutlak
- Fungsi dan pemodelan matematika
- Fungsi dan grafiknya
- Fungsi-fungsi yang penting
- Aljabar fungsi
- Fungsi trigonometri
- Limit Fungsi
- Kekontinuan

Apakah kalkulus itu?

APAKAH KALKULUS ITU?

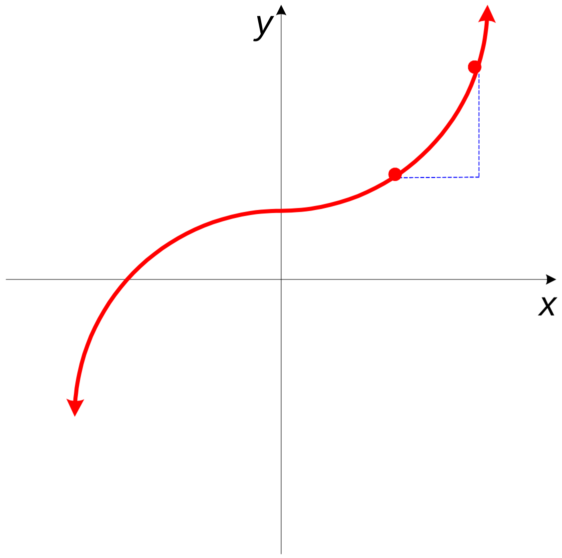
Matematatika elmenter

- Kemiringan garis



Kalkulus

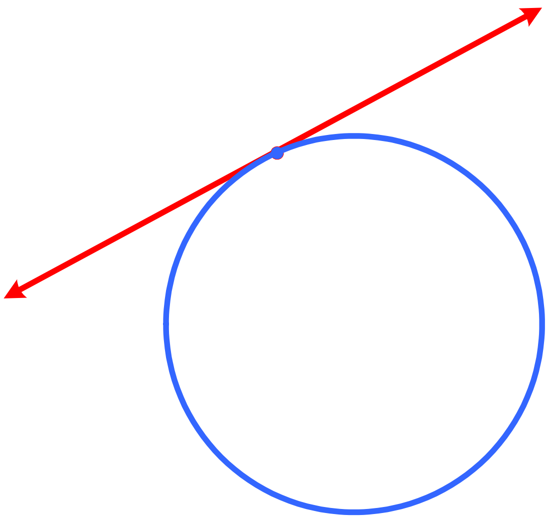
- Kemiringan kurva



APAKAH KALKULUS ITU?

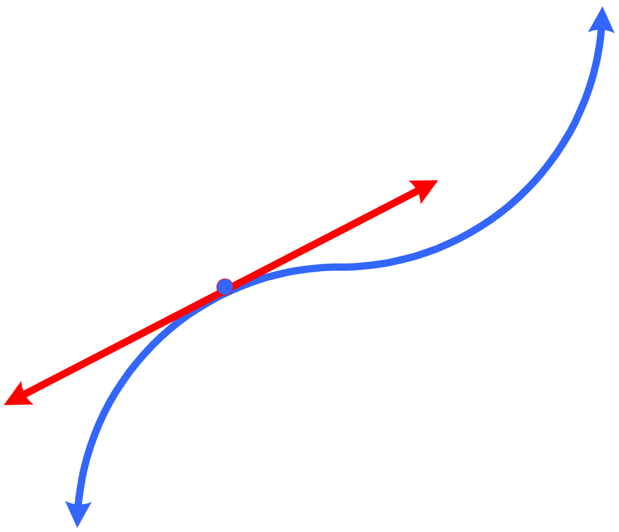
Matematika elmenter

- Garis singgung lingkaran



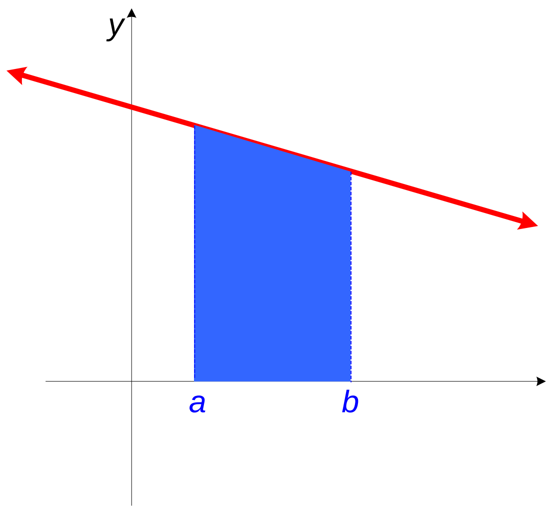
Kalkulus

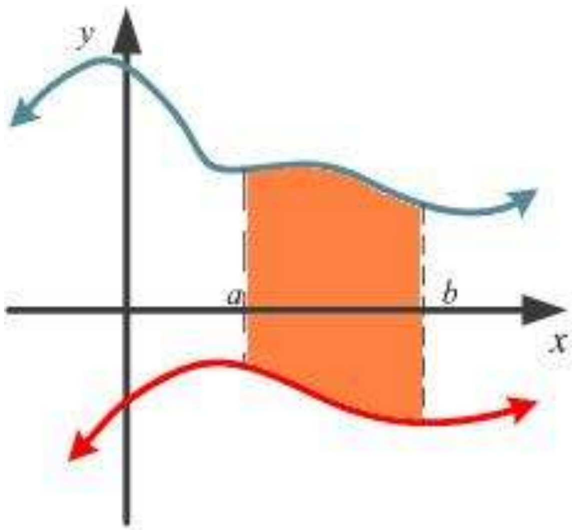
- Garis singgung kurva



Apakah kalkulus itu?

Matematika elmenter	**Kalkulus**
Luas daerah yang dibatasi oleh segmen garis	Luas daerah yang dibatasi oleh kurva





Apakah kalkulus itu?

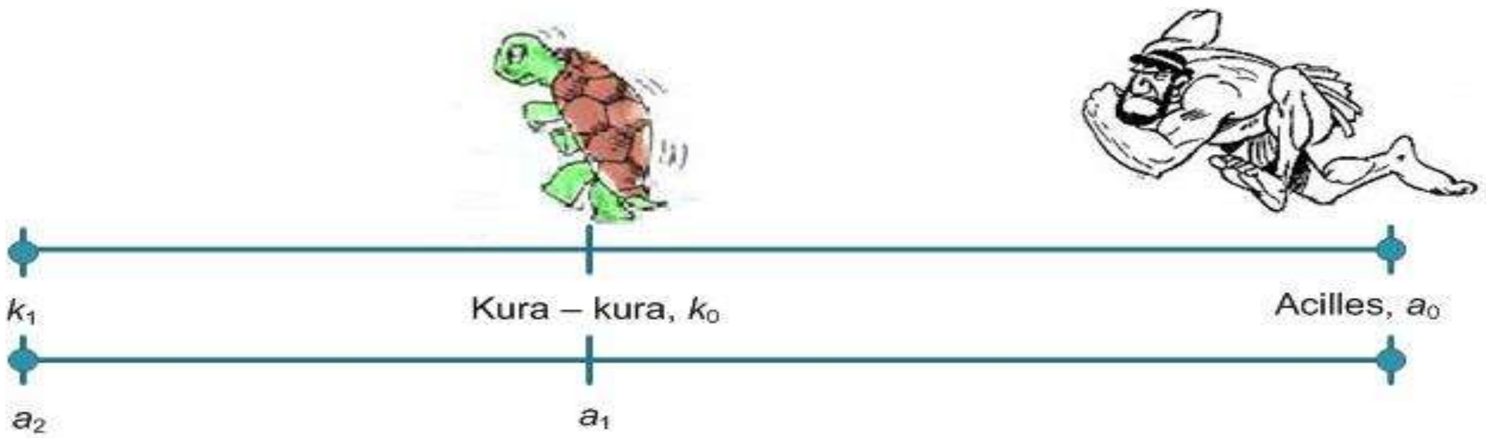
Matematika elmenter	Kalkulus
Perubahan rata-rata posisi dan kecepatan	Perubahan sesaat posisi dan kecepatan
Rata-rata dari sejumlah berhingga bilangan	Rata-rata dari sejumlah tak berhingga bilangan

Apakah kalkulus itu?

- Dua konsep yang penting dalam kalkulus
  - Turunan
  - Integral
- Kedua konsep ini menggunkan konsep lain yang sangat penting: limit

Apakah kalkulus itu?

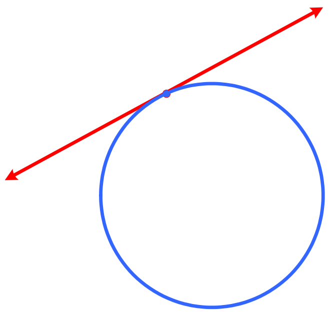
- Limit: Limit: Paradox Zeno

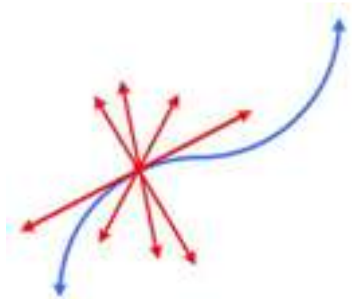


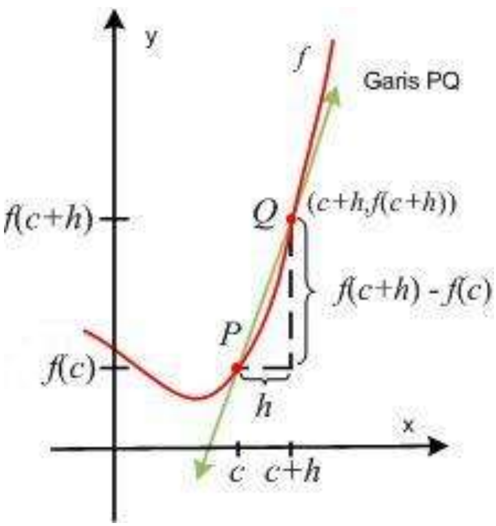
- Achilles: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Kura-kura: $k_0, k_1, k_2, k_3, \ldots$

Apakah kalkulus itu?

- Turunan: masalah garis singgung

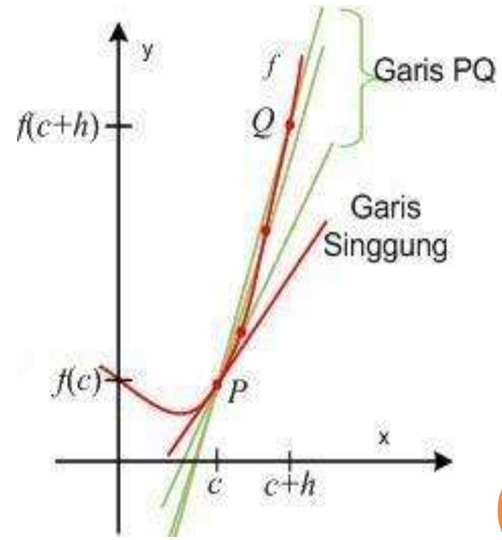






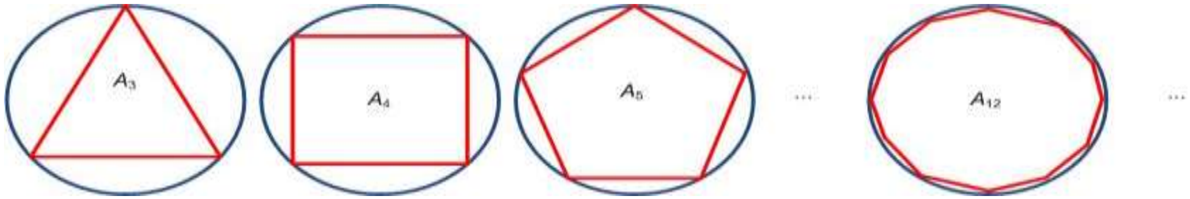
$$m = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

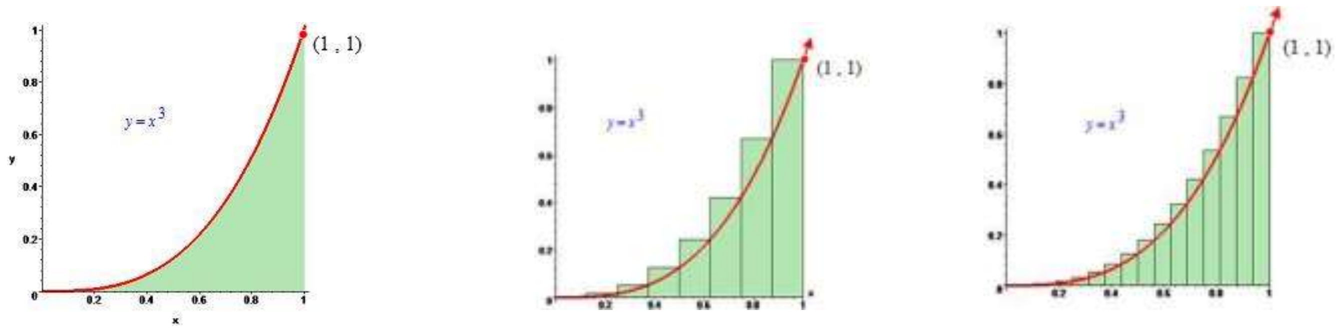


APAKAH KALKULUS ITU?

- Integral: masalah luas
  - Luas lingkaran $L = \lim_{n\to\infty} L_n$



  - Luas daerah $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_{n-1} + L_n$



PENDAHULUAN: BILANGAN REAL DAN NILAI MUTLAK

Sistem bilangan real

Menyelesaikan ketaksamaan

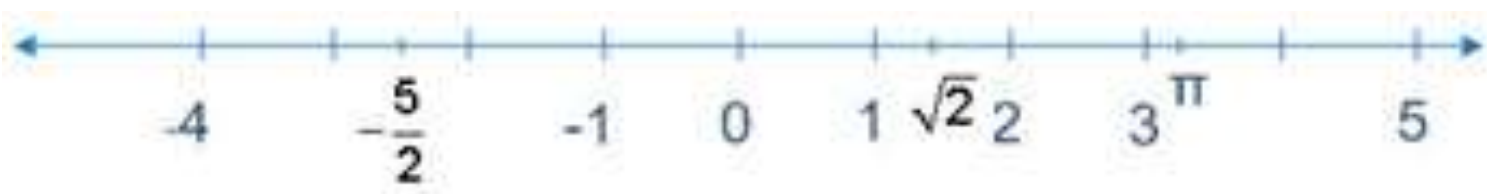
Nilai mutlak

Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Sistem Bilangan Real

- Bilangan real: bilangan yang dapat diekspresikan sebagai desimal

$$-\frac{1}{2} = 0{,}5000\ \ldots \qquad \frac{1}{3} = 0{,}3333\ \ldots \qquad \sqrt{2} = 0{,}4142\ \ldots$$

- Bilangan real dapat direpresentasikan dengan titik pada garis bilangan real



Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Sistem Bilangan Real

- **Sifat-sifat bilangan real:**
  - Sifat aljabar

    2 bilangan real dapat ditambahkan, dikurangkan, dikalikan, dibagi (kecuali dengan nol) untuk memperoleh bilangan real yang baru.
  - Sifat urutan

    relasi urutan $<$ dengan $x < y \Leftrightarrow y - x$ positif

    relasi urutan $\leq$ dengan $x \leq y \Leftrightarrow y - x$ positif atau nol.
  - Sifat kelengkapan

    terdapat cukup banyak bilangan-bilangan real untuk 'memenuhi' garis bilangan real, dalam pengertian tidak ada setitik pun celah diantaranya.

Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Sistem Bilangan Real

- Sifat Urutan
  - Trikotomi.

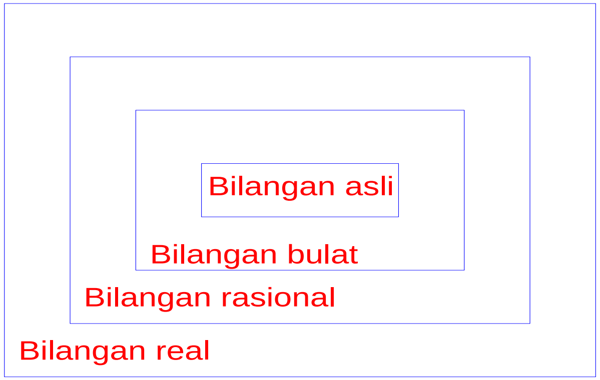
    Jika x dan y adalah bilangan, maka tepat satu dari yang berikut ini dipenuhi:

    $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.
  - Transitif. $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$.
  - Penjumlahan. $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
  - Perkalian.

    Untuk z bilangan positip, $x < y \Rightarrow xz < yz$. Untuk z bilangan negatip, $x < y \Rightarrow xz > yz$.
  - Kebalikan. $x > 0 \Rightarrow$ dan $x > 0$, $y > 0$, $x < y \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{z}$
- Sifat-sifat urutan tetap berlaku jika $<$ dan $>$ diganti dengan $\leq$ dan $\geq$.

Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Sistem Bilangan Real

- Himpunan bilangan yang khusus dari bilangan real



- Himpunan **bilangan rasional**:bilangan yang dapat dinyatakan sebagai pembagian p/q dengan p dan q adalah bilangan bulat, dan $q \neq 0$.

  Contoh:

$$-\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{45}{47} \qquad \frac{112}{1}$$

BILANGAN REAL DAN NILAI MUTLAK: INTERVAL BILANGAN REAL

Notasi Himpunan	Notasi Interval	Grafik
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
R	$(-\infty, \infty)$	

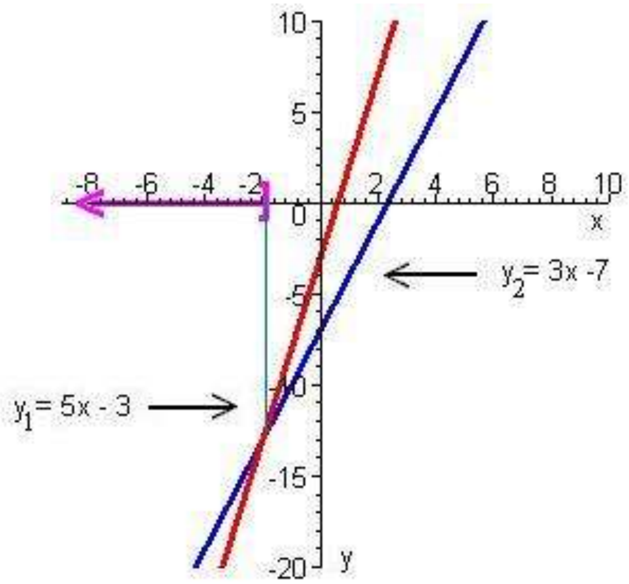
Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Menyelesaikan Ketaksamaan

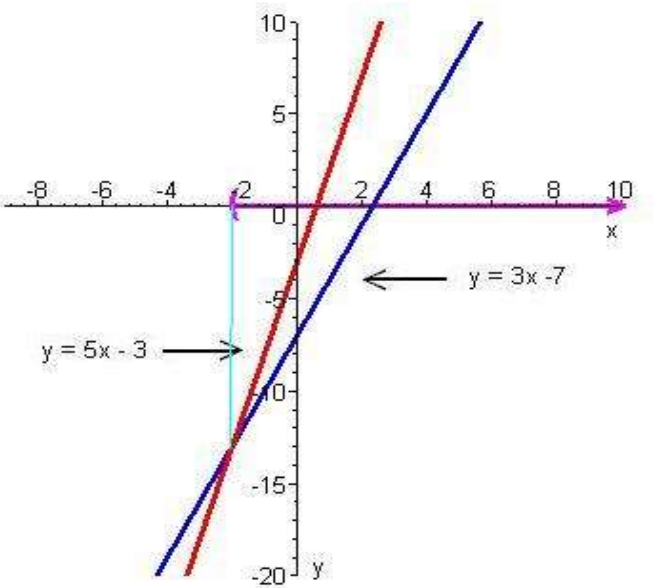
- Operasi-operasi pada kedua sisi ketaksamaan tanpa mengubah himpunan penyelesaiannya.
  - menambahkan bilangan yang sama pada kedua belah sisi dari ketaksamaan.
  - mengalikan bilangan positif yang sama pada kedua belah sisi dari ketaksamaan.
  - mengalikan bilangan negatif yang sama pada kedua belah sisi dari ketaksamaan, akan tetapi harus mengubah arah dari tanda ketaksamaan.

Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Menyelesaikan ketaksamaan

- **Contoh.** *Carilah himpunan penyelesaian dari ketaksamaan*

  a. $5x - 3 \leq 3x - 7.$ b. $5x - 3 > 3x - 7.$



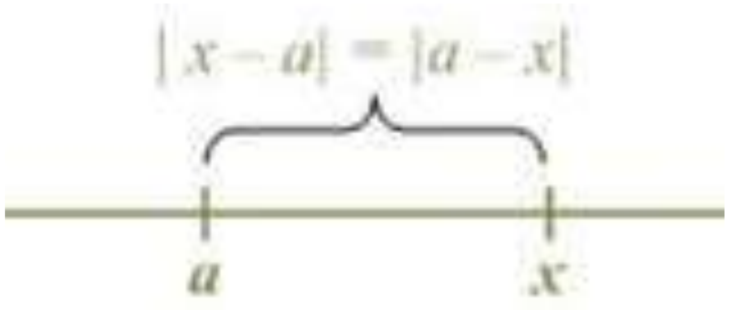


Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Sistem Bilangan Real

- Nilai Mutlak

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

- Nilai mutlak dapat dipandang sebagai jarak tidak berarah.
- Nilai $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal, dan $|x-a|$ adalah jarak antara x dan a



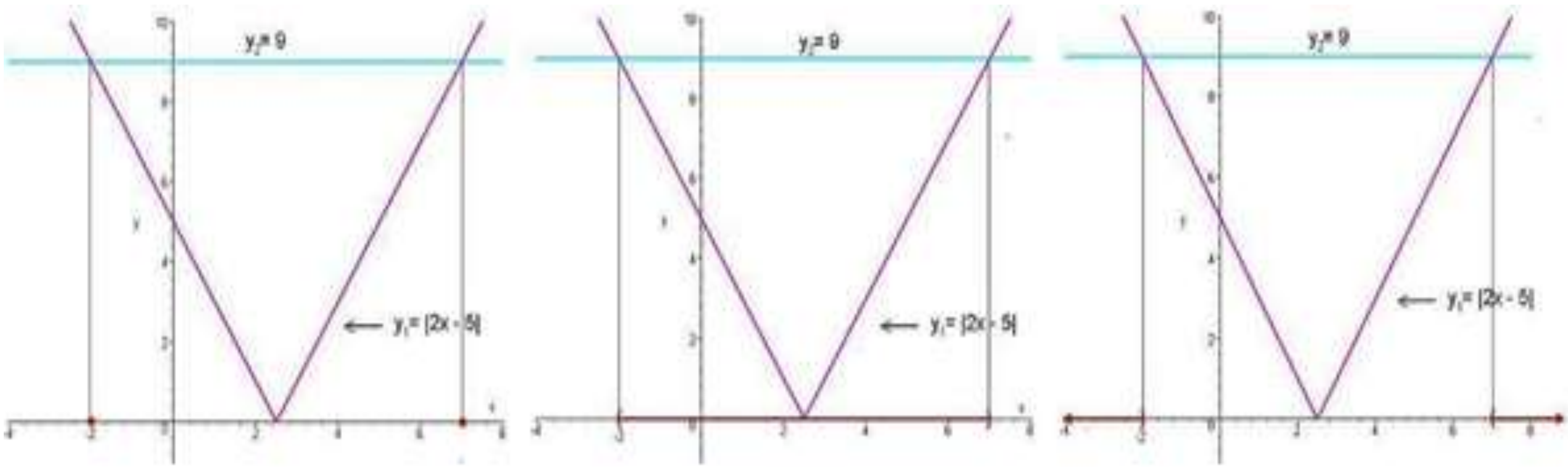
Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Nilai Mutlak

Sifat-sifat nilai mutlak yang penting
1. $\|ab\| = \|a\|\|b\|$ 2. $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$ 3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (ketaksamaan segitiga) 4. $\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$
ketaksamaan yang melibatkan nilai mutlak 1. $\|x\| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$ 2. $\|x\| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$
Nilai mutlak dan kuadrat 1. $\|x\|^2 = x^2$ dan $\|x\| = \sqrt{x}$ 2. $\|x\| < \|y\| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Nilai Mutlak

- **Contoh.** *Carilah penyelesaian dari persamaan/ketaksamaan*

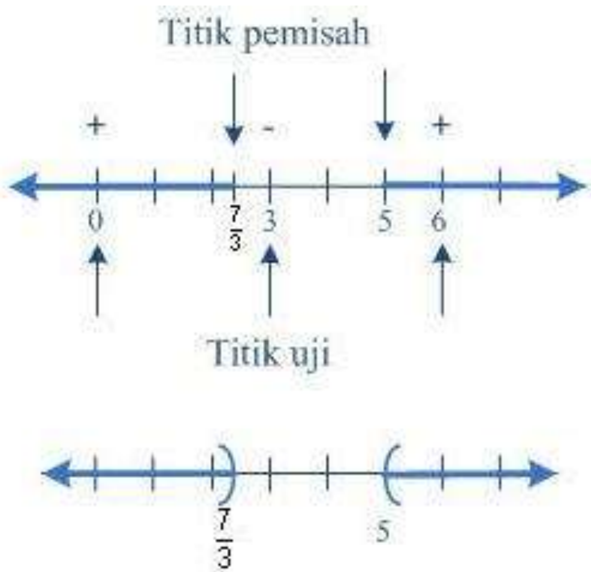
  a. $|2x - 5| = 9$ b. $|2x - 5| < 9$ c. $|2x - 5| > 9$

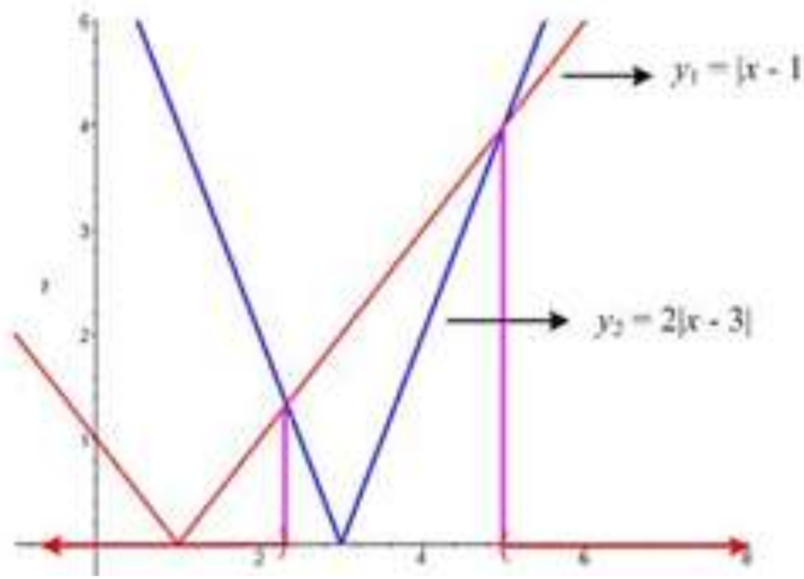


(a) (b) (c)

Bilangan Real dan Nilai Mutlak: Nilai Mutlak

- **Contoh.** *Carilah penyelesaian dari ketaksamaan* $|x - 1| < 2|x - 3|$.





FUNGSI
DAN
PEMODELAN MATEMATIKA

Pengertian Fungsi

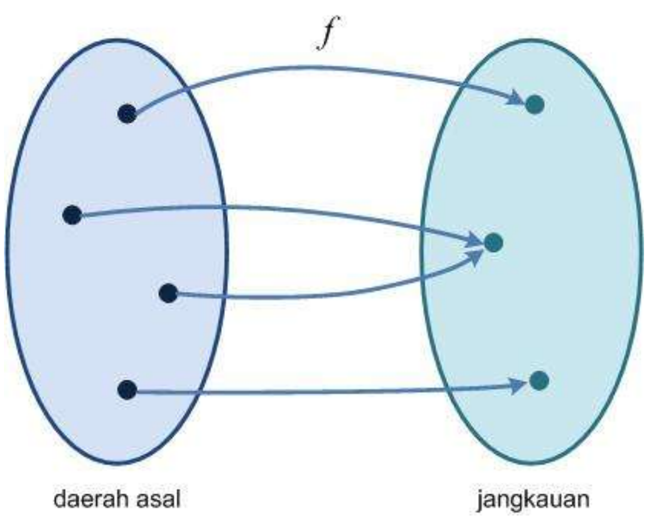
Pemodelan Matematika

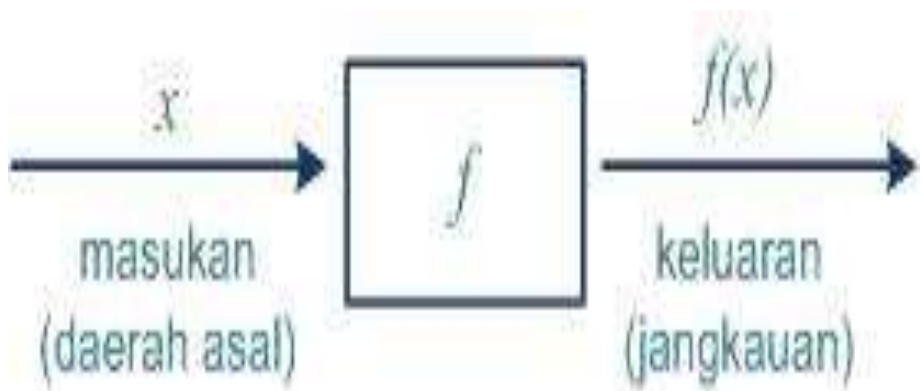
Fungsi dan Pemodelan Matematika: Sistem Bilangan Real

- Umumnya pemodelan masalah aplikasi secara matematika dapat dilakukan dalam 3 langkah
  - **Gambarkan** diagram yang mengilustrasikan masalah (jika memungkinkan) dan lengkapi dengan data-data yang diketahui
  - **Definisikan** peubah yang terlibat.
  - **Modelkan** fungsi yang menghubungkan peubah-peubah yang ada.

Fungsi dan Pemodelan Matematika: Pengertian Fungsi

- **Definisi.** *Suatu fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menentukan untuk setiap obyek x pada himpunan pertama, di sebut* ***daerah asal****, tepat satu nilai f(x) dari himpunan kedua, disebut* ***jangkauan****.*



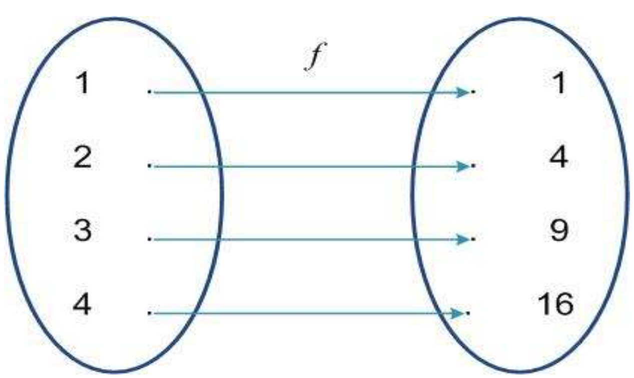


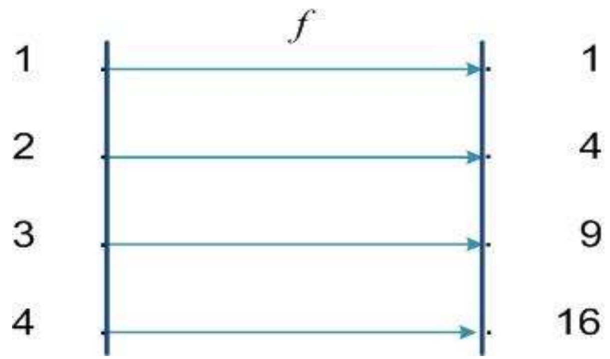
FUNGSI DAN PEMODELAN MATEMATIKA: PENGERTIAN FUNGSI

- Representasi fungsi.
  - secara verbal dengan kata-kata,
  - diagram,
  - skema,
  - tabel,
  - himpunan pasangan terurut setiap anggota daerah asal dan keluarannya,
  - persamaan matematika,
  - grafik.

Fungsi dan Pemodelan Matematika: Pengertian Fungsi

- Contoh. Representasi fungsi.
  - Verbal: fungsi *f* memetakan bilangan bulat positif yang kurang dari lima ke bilangan kuadratnya





x	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	9	16

$$f = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$$

$$f(x) = x^2, \quad \{x \in N \mid x < 5\}$$

Fungsi dan Pemodelan Matematika: Pengertian Fungsi

b.

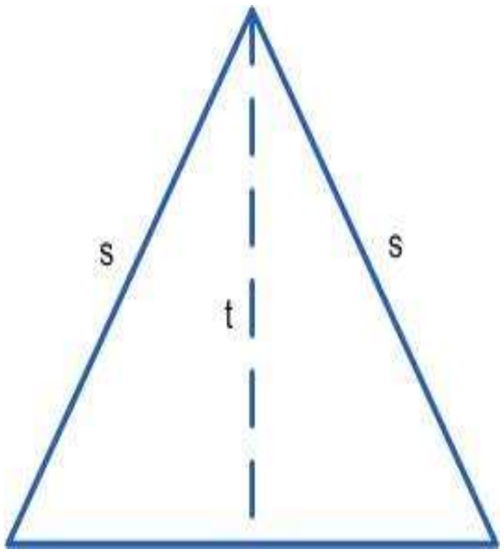
- **Contoh.** *Periksa apakah persamaan $x^2 + y^2 = 4$ merupakan fungsi.*

- **Contoh.** *Carilah daerah asal dari fungsi-fungsi berikut:*

a. $f(x) = x^2 + 5$ b. $g(x) = \frac{2}{(x-2)}$ c. $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Fungsi dan Pemodelan Matematika: Pemodelan Matematika

- **Contoh.** *Keliling suatu segitiga sama sisi adalah k, nyatakan luas segitiga tersebut dalam k.*



$$s = \frac{k}{3}$$

Gambarkan.

Definisikan peubah. Misalkan

s menyatakan sisi segitiga

t menyatakan tinggi segitiga

L menyatakan luas segitiga

Modelkan fungsi.

$$t = \sqrt{s^2 - (\frac{s}{2})^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{k}{6}\sqrt{3}$$

$$L = \frac{1}{2} st = \frac{1}{2}\frac{k}{3}\frac{k}{6}\sqrt{3} = \frac{k^2}{36}\sqrt{3}$$

Fungsi dan Pemodelan Matematika: Pemodelan Matematika

- **Contoh** *Jumlah dari dua bilangan real adalah 100. Nayatkanlah bilangan kedua dalam bilangan pertama.*

- Gambarkan.
- Definisikan peubah. Misalkan
  - x menyatakan bilangan pertama dan
  - y menyatakan bilangan kedua
- Modelkan.

$$x + y = 100$$

$$y = 100 - x$$

Fungsi dan Grafiknya

Fungsi dan Grafiknya:

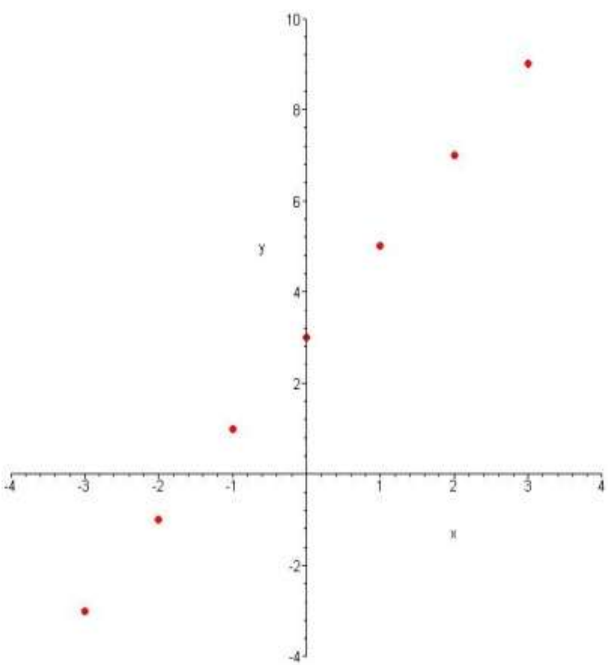
Langkah-langkah menggambar grafik fungsi:

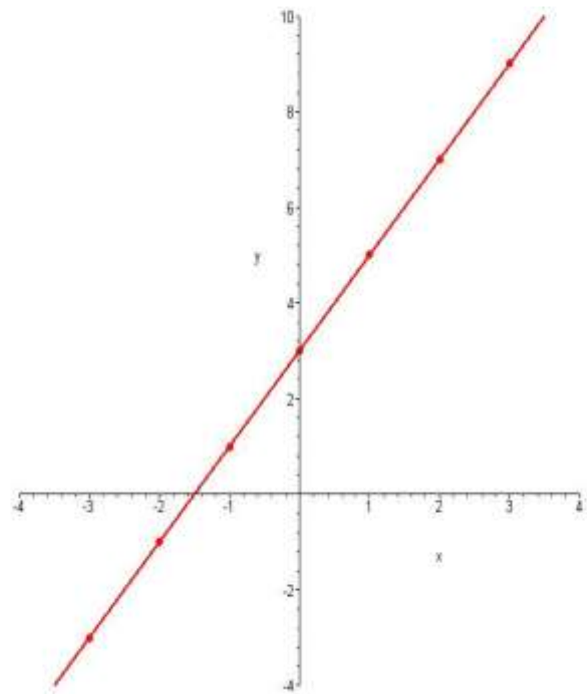
- **Tentukan** koordinat dari beberapa titik yang memenuhi persamaan.
- **Plot** titik-titik tersebut pada sistem koordinat
- **Hubungkan** titik-titik tersebut dengan kurva mulus

FUNGSI DAN GRAFIKNYA:

- **Contoh** *Gambarkan grafik fungsi* $f(x) = 2x+3$

x	y
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

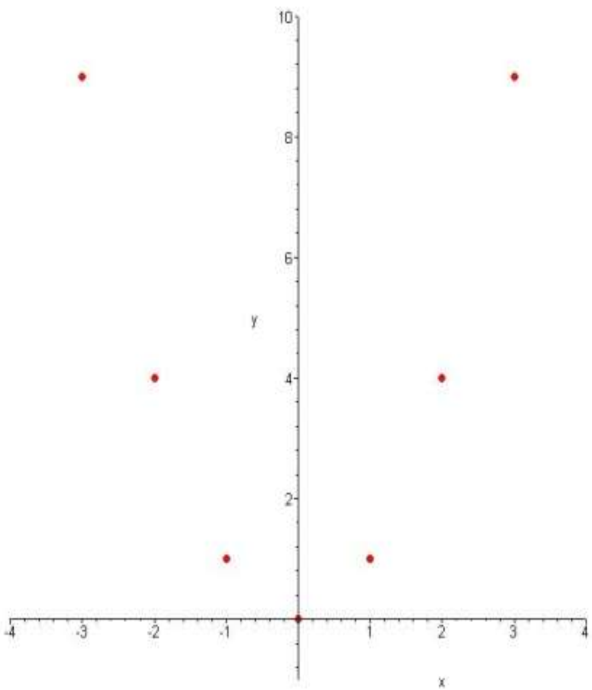


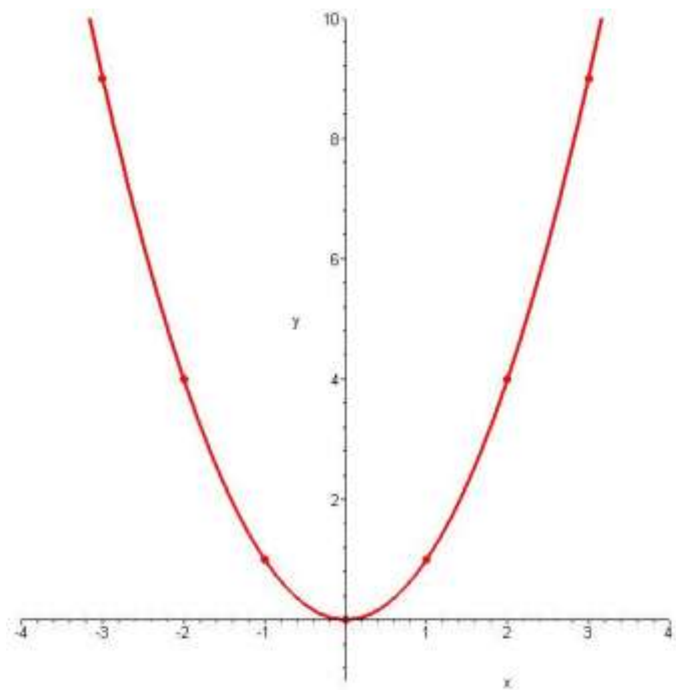


FUNGSI DAN GRAFIKNYA:

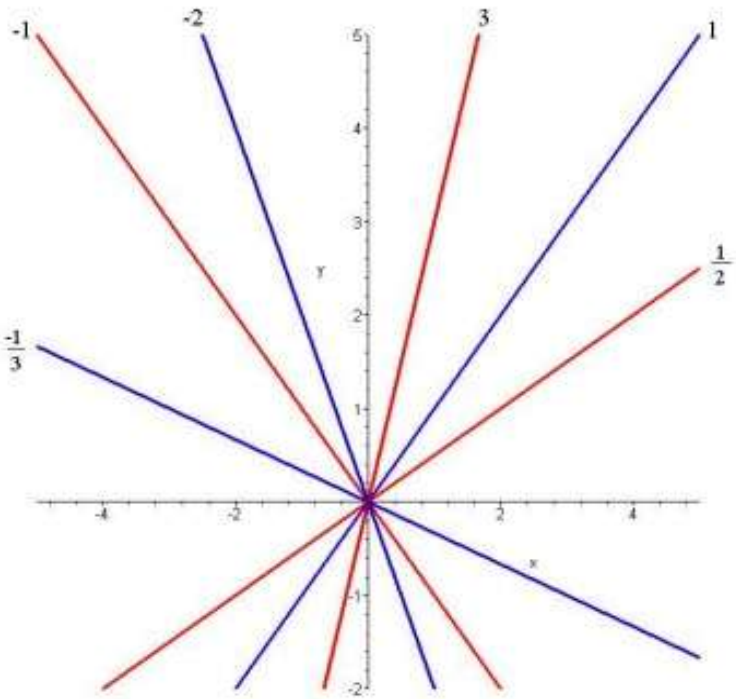
- **Contoh** *Gambarkan grafik fungsi* $g(x) = x^2$

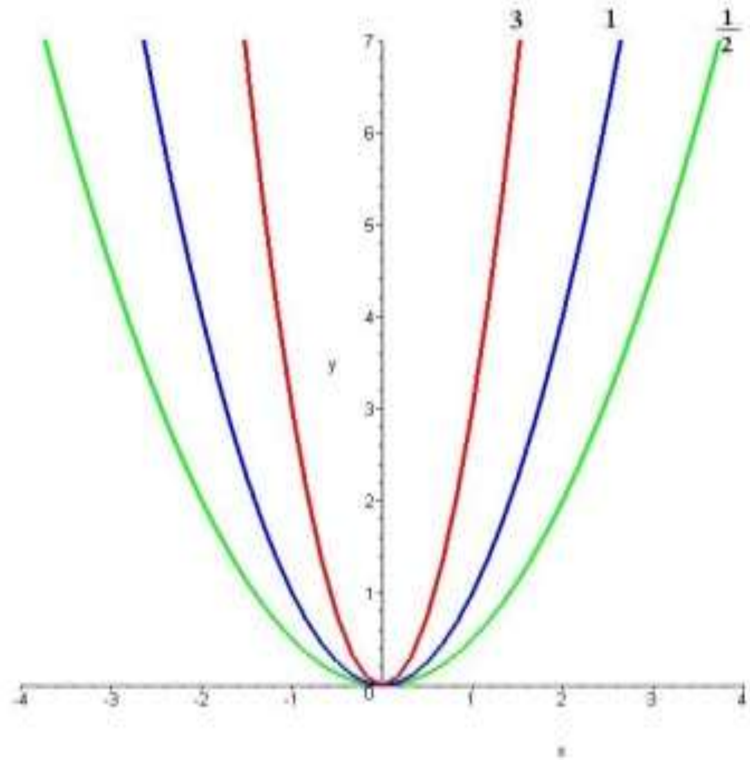
x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9





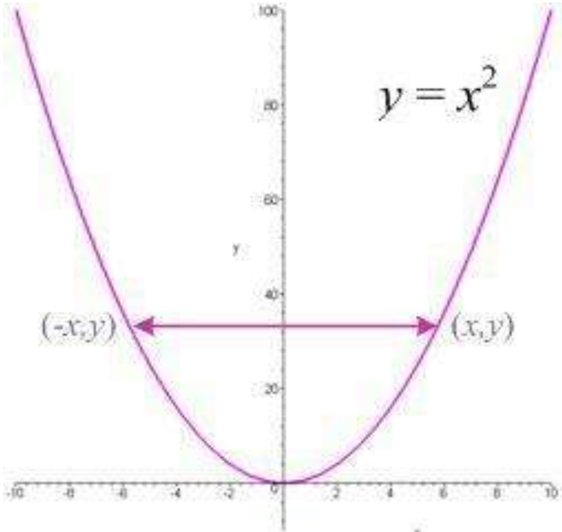
FUNGSI DAN GRAFIKNYA:

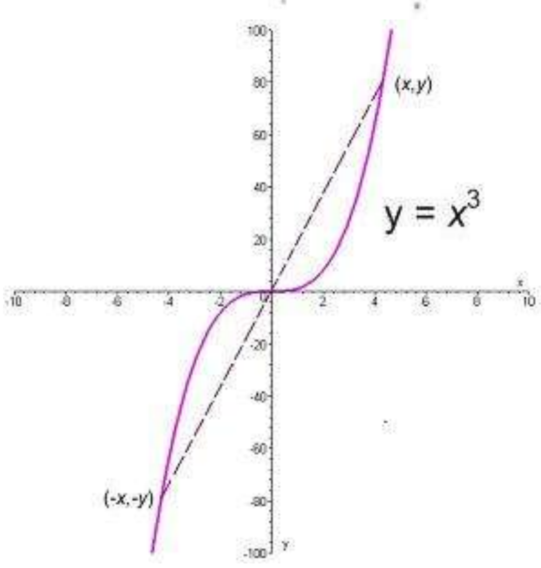




FUNGSI DAN GRAFIKNYA:

- Fungsi genap
  - $f(-x) = f(x)$
  - Grafik simetris terhadap sumbu-y
- Fungsi ganjil
  - $f(-x) = -f(x)$
  - Grafik simetris terhadap titik pusat





FUNGSI DAN GRAFIKNYA:

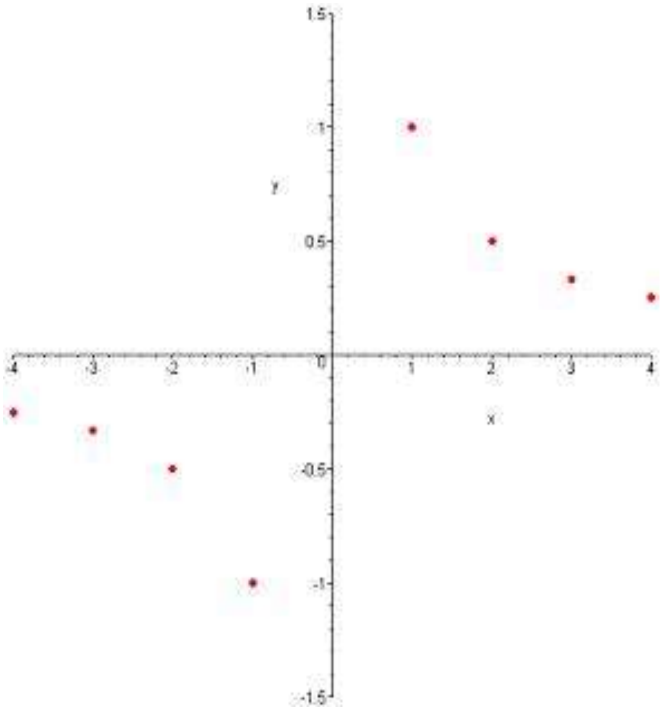
- **Contoh** *Gambarlah grafik fungsi* $f(x) = 1/x$

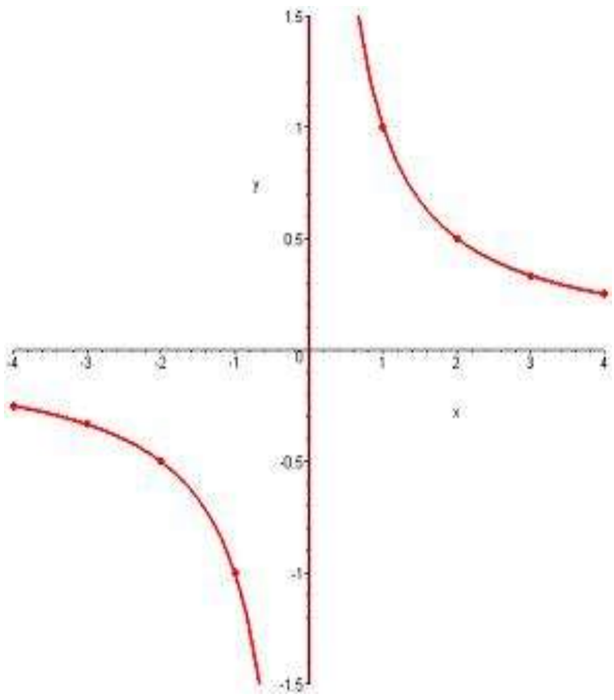
- Jika x bernilai positif dan sangat besar, maka $h(x)$ positif dan sangat kecil.
- Jika x bernilai positif dan dekat ke 0, maka $h(x)$ positif dan sangat besar.
- Jika x bernilai negatif dan bilangannya sangat besar, maka $h(x)$ negatif dan sangat kecil.
- Jika x bernilai negatif dan dekat ke 0, maka $h(x)$ negatif dan sangat besar.

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

FUNGSI DAN GRAFIKNYA:

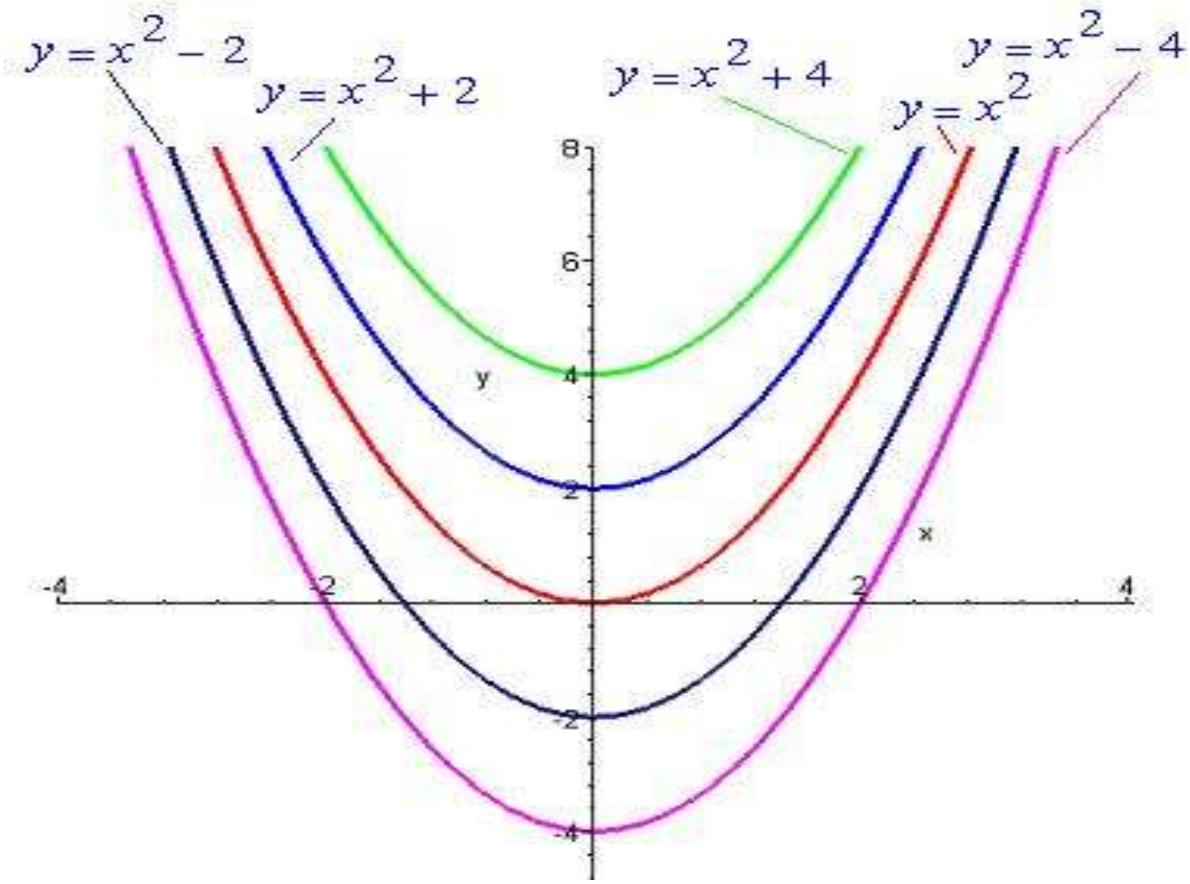
x	*y*
1	1
2	½
3	1/3
4	1/4





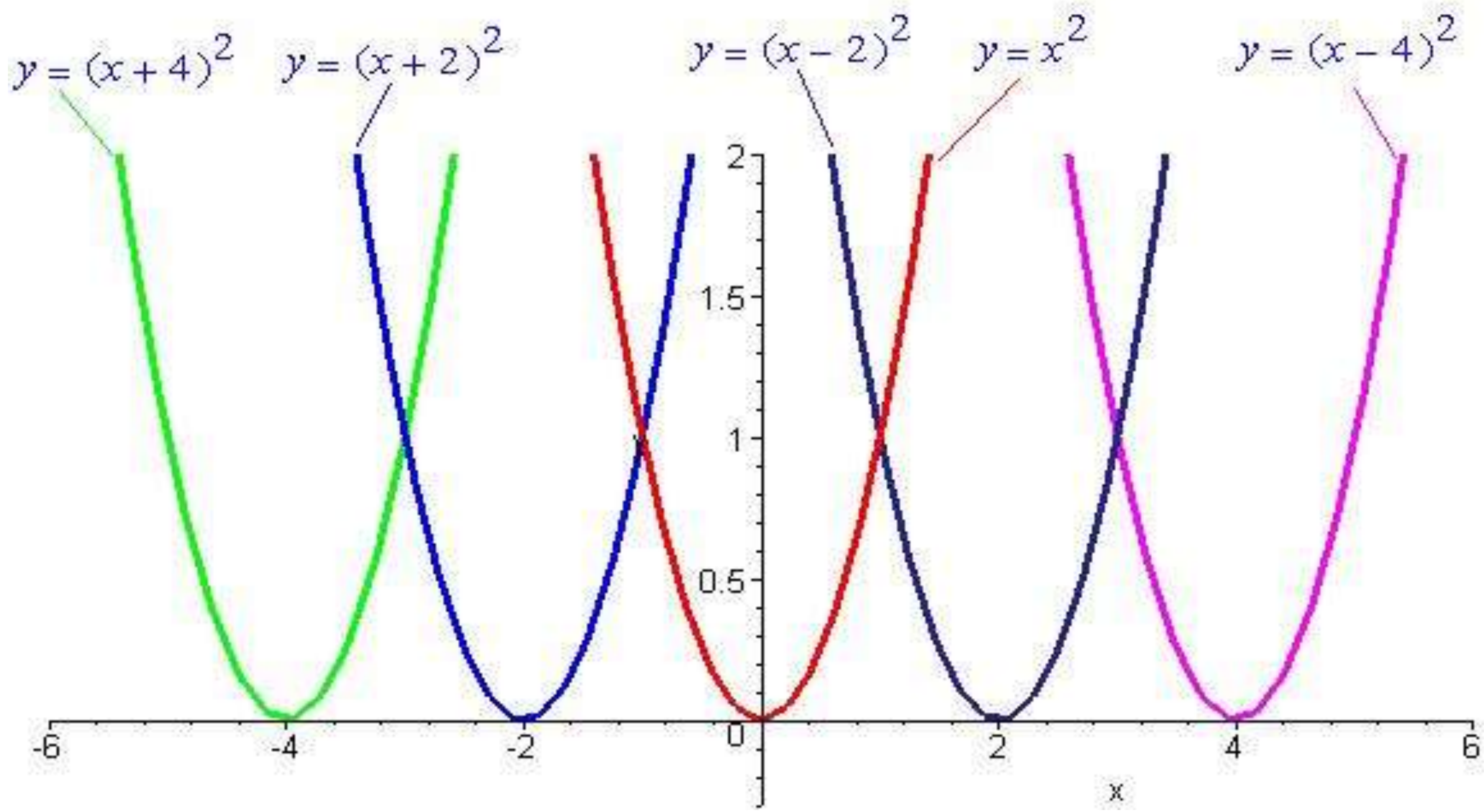
Fungsi dan Grafiknya: Pergeseran grafik fungsi

- Bergeser sepanjang sumbu-y

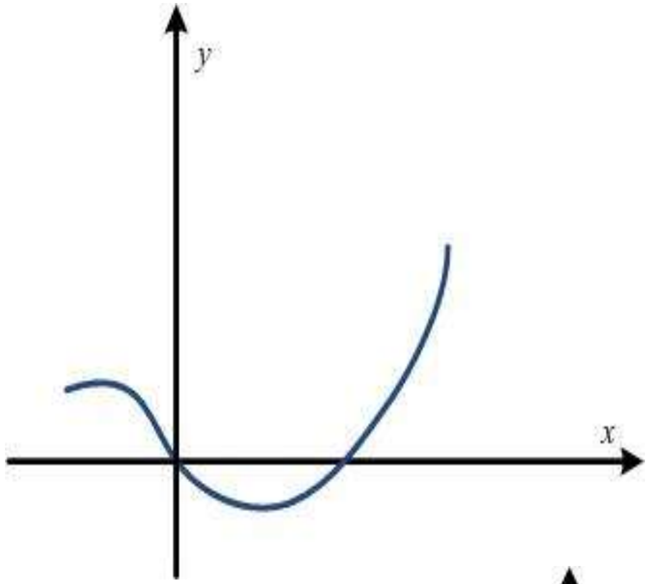


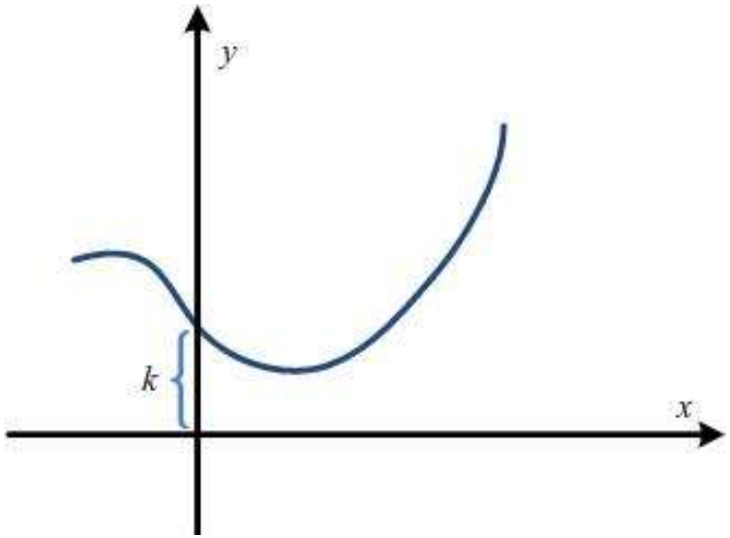
FUNGSI DAN GRAFIKNYA: PERGESERAN GRAFIK FUNGSI

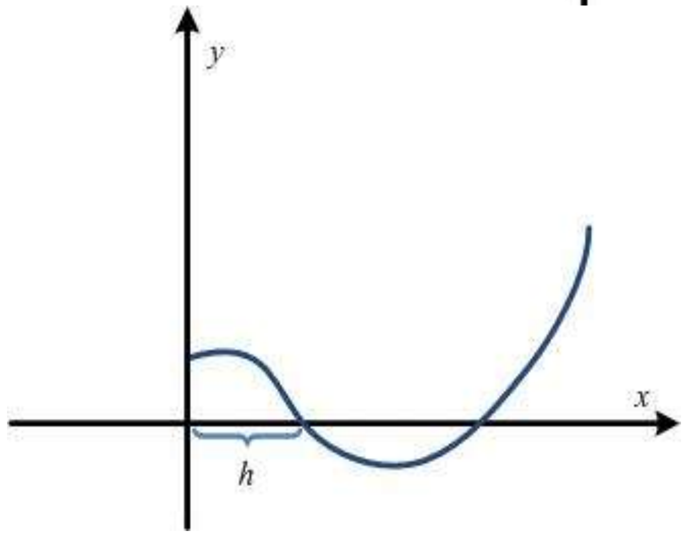
- Bergeser sepanjang sumbu-x



Fungsi dan Grafiknya: Pergeseran grafik fungsi







Fungsi-fungsi yang Penting

FUNGSI-FUNGSI YANG PENTING:

- Fungsi konstan $f(x) = k$, untuk suatu konstanta k.
- Fungsi identitas $f(x) = mx$.
- Fungsi linear $f(x) = mx + c$, untuk konstanta m dan c, $m \neq 0$.
- Fungsi kuadratik $f(x)=ax^2 + bx + c$, untuk konstanta a, b, dan c, $a \neq 0$.
- Fungsi polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ berderajat n, untuk konstanta a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ dan $a_n \neq 0$.

Fungsi-fungsi yang Penting:

- Fungsi rasional: pembagian polinomial dengan polinomial.

  Contoh:

$$f(x) = \frac{x^5 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x + 4}$$

- Fungsi nilai mutlak $f(x) = |x|$, dengan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}.$$

- Fungsi bilangan bulat terbesar $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
- Fungsi *piecewise*

  Contoh:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , -\infty < x \leq 1 \\ x - 1 & , 1 < x < \infty \end{cases}$$

Aljabar Fungsi

Operasi fungsi

Komposisi fungsi

ALJABAR FUNGSI: OPERASI FUNGSI

- Operasi aljabar yang dapat diterapkan pada fungsi untuk menghasilkan fungsi lain:
  - Penjumlahan / Pengurangan
  - Perkalian
  - Pembagian
  - Penguadratan
  - Penarikan akar

  dengan daerah asal fungsi yang dihasilkan

ALJABAR FUNGSI: OPERASI FUNGSI

- **Contoh.** *Diberikan* $f(x) = \sqrt{1-x}$ *dengan daerah asal* $x \leq 1$ *dan* $g(x) = \sqrt{1+x}$ *dengan daerah asal* $x \geq -1$.

  Carilah formula untuk 2f, f+g, f-g, f.g, f/g, dan f^4 *dan daerah asal masing-masing.*

ALJABAR FUNGSI: OPERASI FUNGSI

- Penyelesaian:

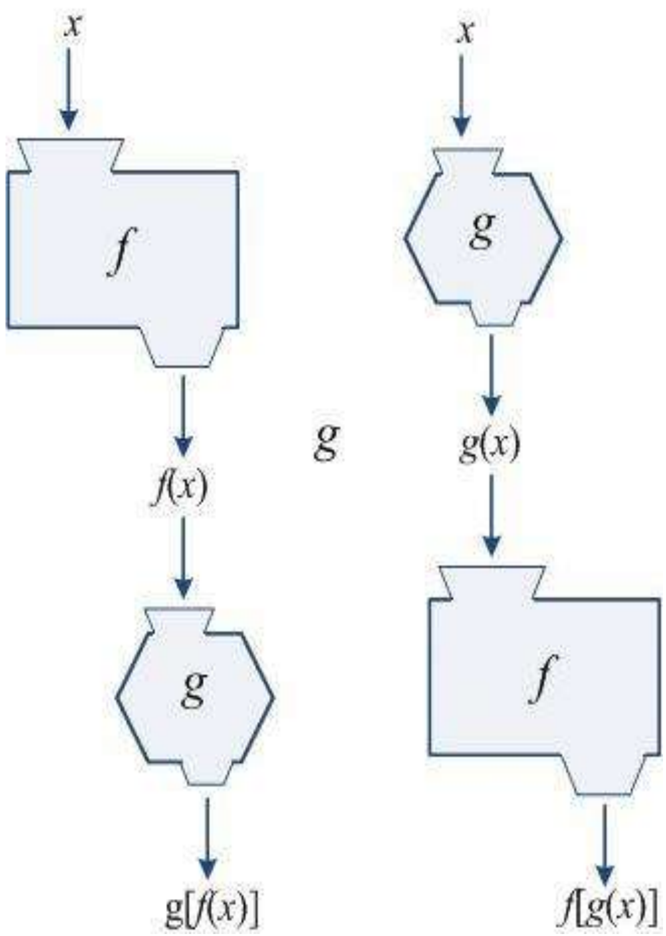
Formula	Daerah asal	Keterangan
$2f(x) = 2\sqrt{1-x}$	$x \le 1$	Daerah asal f
$f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$	$-1 \le x \le 1$	Irisan $x \le 1$ dengan $x \ge -1$
$f(x) - g(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$	$-1 \le x \le 1$	Irisan $x \le 1$ dengan $x \ge -1$
$f(x).\, g(x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} = 1 - x^2$	$-1 \le x \le 1$	Irisan $x \le 1$ dengan $x \ge -1$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$	$-1 < x \le 1$	Karena $g(-1) = 0$
$(f(x))^4 = (\sqrt{1-x}\,)^4 = (1-x)^2$	$x \le 1$	Daerah asal f

ALJABAR FUNGSI: KOMPOSISI FUNGSI

- **Definisi.** *Komposisi dari dua fungsi g dan f adalah fungsi* $h = g \circ f$ *yang didefinisikan dengan*

$$h(x) = g(f(x))$$

untuk semua x pada daerah asal f sedemikian sehingga $u = f(x)$ *berada pada daerah asal g.*



Aljabar Fungsi: Komposisi Fungsi

- **Contoh.** *Diberikan* $f(x) = \sqrt{x}$ *dan* $g(x) = 4 - x^2$,

$$g \circ f = g(f(x)) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$$

untuk x ≥ 0.

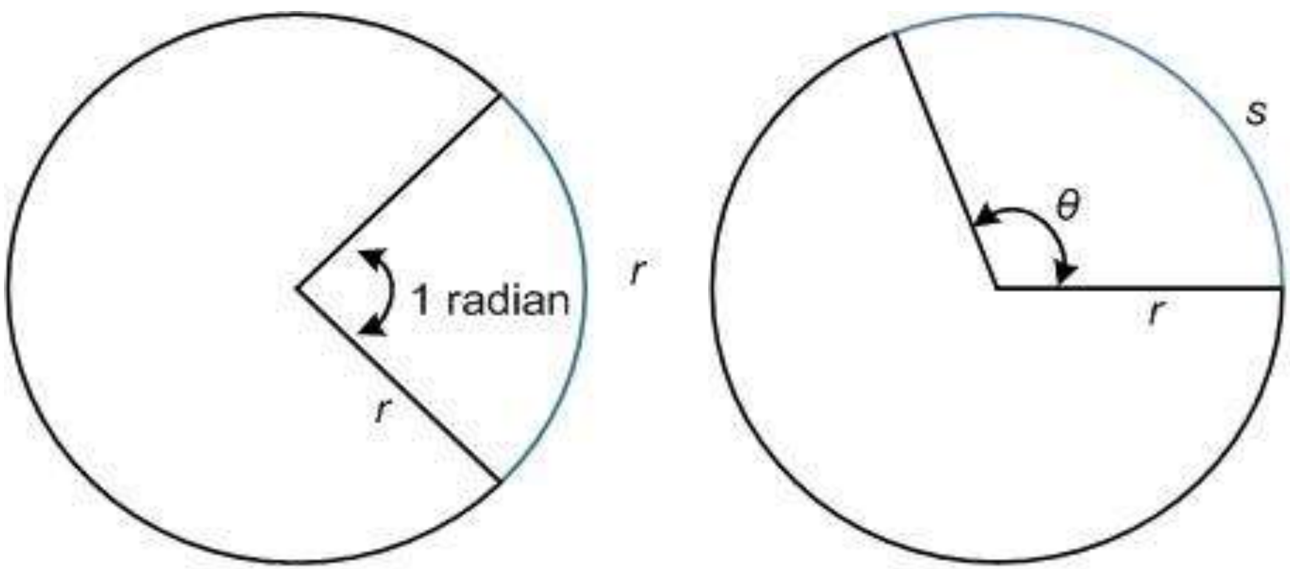
$$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{4 - x^2}$$

untuk |x| ≤ 2.

Fungsi Trigonometri

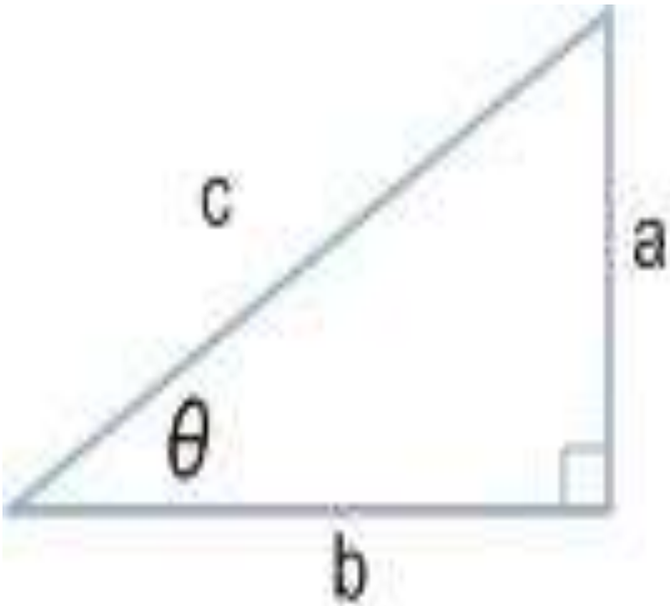
FUNGSI TRIGONOMETRI: SUDUT RADIAN

- Misalnya
  - r = jari-jari lingkaran
  - s = pajang busur pada lingkaran



$$\theta = \frac{s}{r}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI:



$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

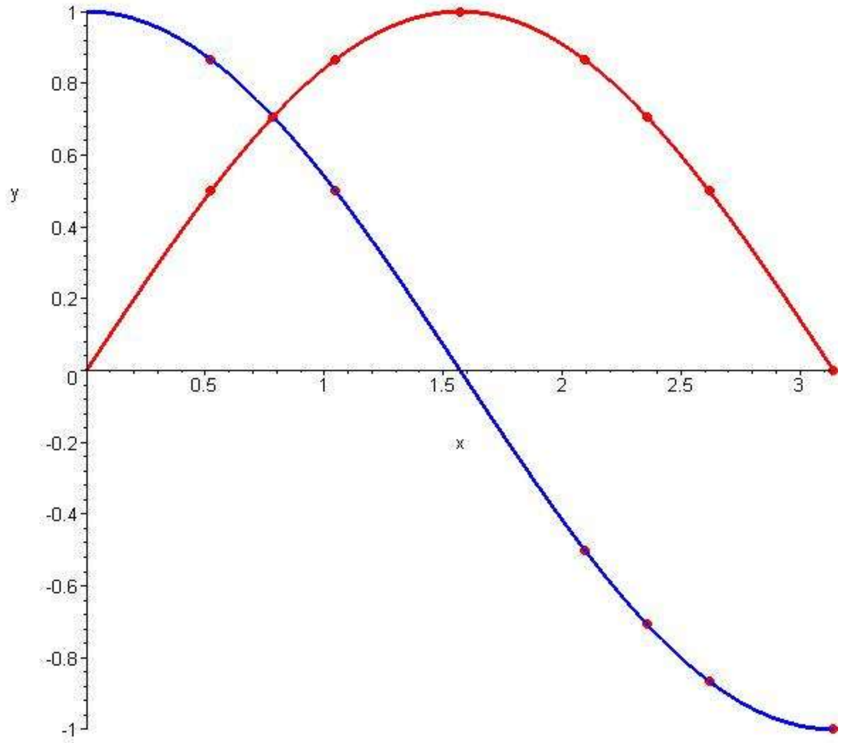
$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

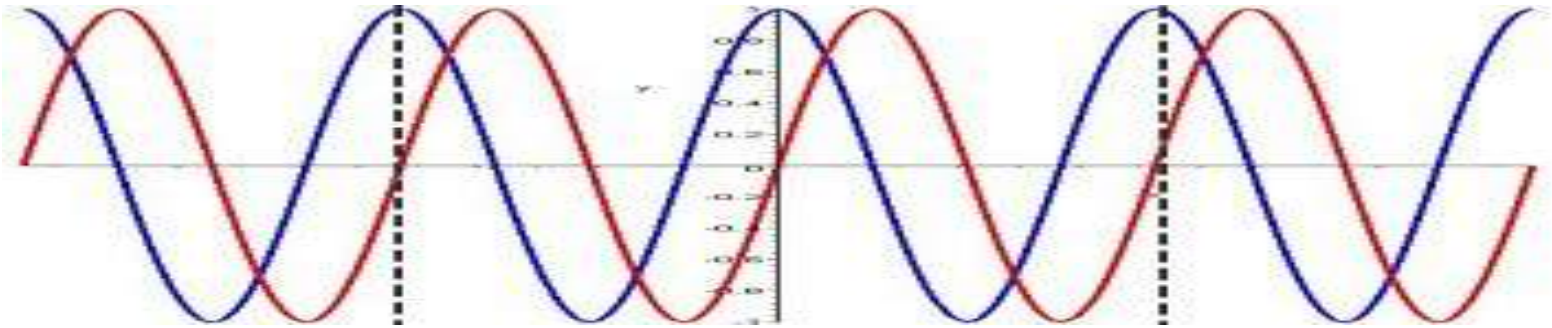
$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\sin t}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI: GRAFIK FUNGSI SINUS DAN KOSINUS

t	$\sin t$	$\cos t$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$- 1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
π	0	-1



Fungsi Trigonometri:



- sin dan cos bernilai antara -1 dan 1.
- keduanya berulang pada setiap interval 2π yang berurutan
- grafik $y = \sin t$ simetris terhadap titik asal, grafik $y = \cos t$ simetris terhadap sumbu-y.
- grafik dari sin t sama dengan cos t hanya bergeser sejauh $\pi/2$.
- amplitudo: 1
- periode: 2π

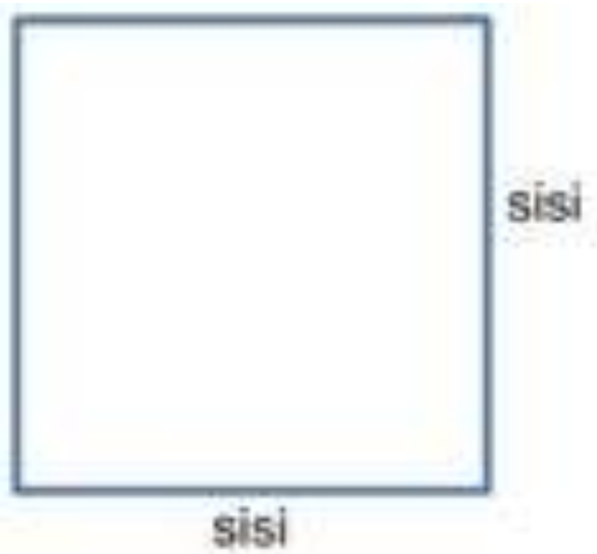
Limit Fungsi

Pengertian Limit Fungsi

Pengertian Limit Fungsi Secara Matematis

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- Luas persegi



- Jika sisi $s = 3$ maka Luas $L = 3^2 = 9$.
- Berapa L jika s dekat dengan 3?

Sisi	**Luas**
2,9	8,41
2,99	8,9401
2,999	8,994001
2,9999	8,99940001
↓	↓
3	?
↑	↑
3,0001	9,00060001
3,001	9,006001
3,01	9,0601
3,1	9,61

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

$f(x) = x^2 + 3$ $\quad f(1) = 4$

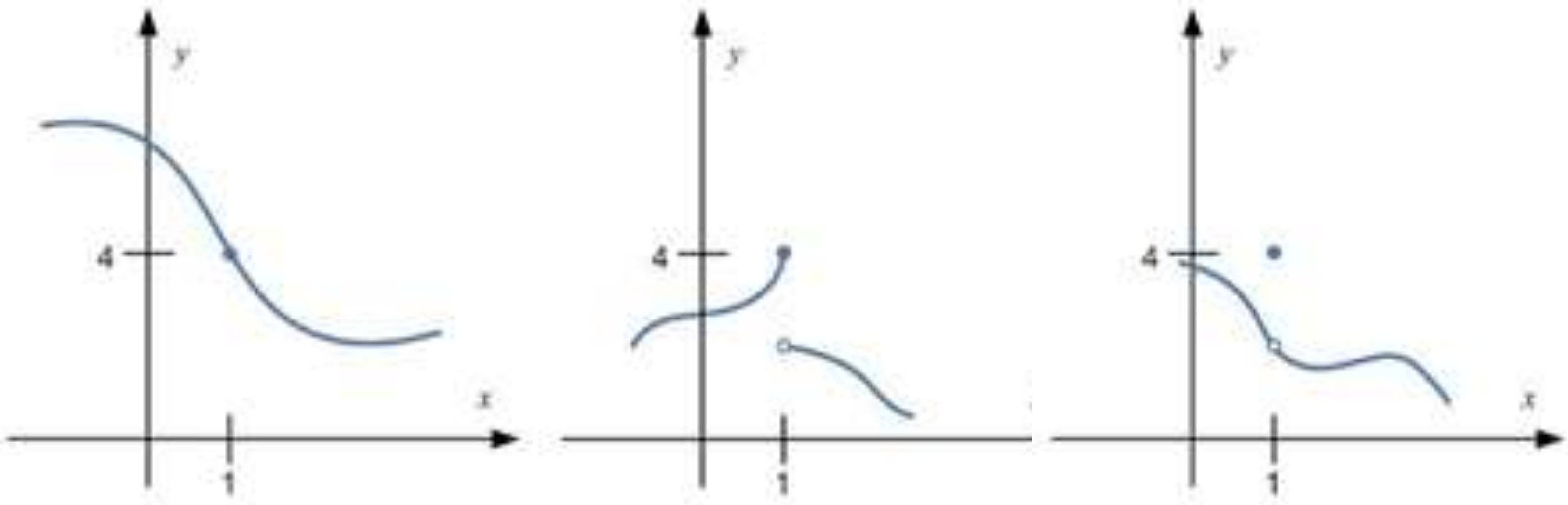
- Bagaimanakah perilaku $f(x)$ ketika x mendekati 1?

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 3 = 4$$

x	$f(x)$
0,9	3,81
0,99	3,9801
0,999	3,998001
0,9999	3,99980001
↓	↓
1	?
↑	↑
1,0001	4,00020001
1,001	4,002001
1,01	4,0201
1,1	4,21

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

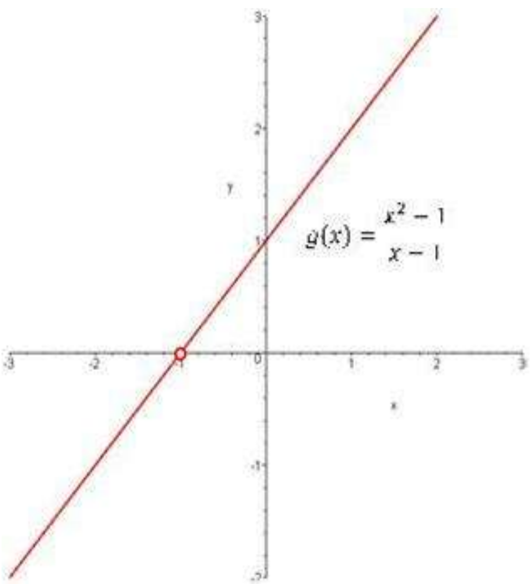
- Apa bedanya mengatakan nilai $f(1) = 4$ dengan mengatakan $f(x)$ mendekati 4 ketika x mendekati 1?



Limit Fungsi

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- f tidak terdefinisi di $x = 1$,
- berapakah nilai $g(x)$ ketika x mendekati 1?



$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

x	***g*(*x*)**
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999
↓	↓
1	?
↑	↑
1,0001	2,0001
1,001	2,001
1,01	2,01
1,1	2,1

Limit Fungsi: Pengertian

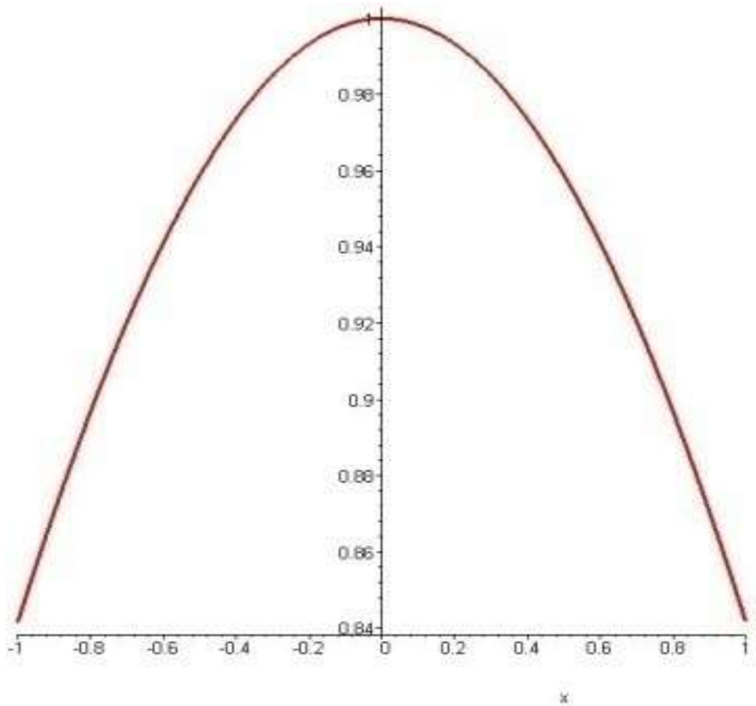
- **Definisi.** Pengertian intuitif limit

  Untuk mengatakan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *berarti ketika x mendekati tetapi berbeda dengan c maka f(x) mendekati dengan L.*

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Contoh.** *Carilah* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

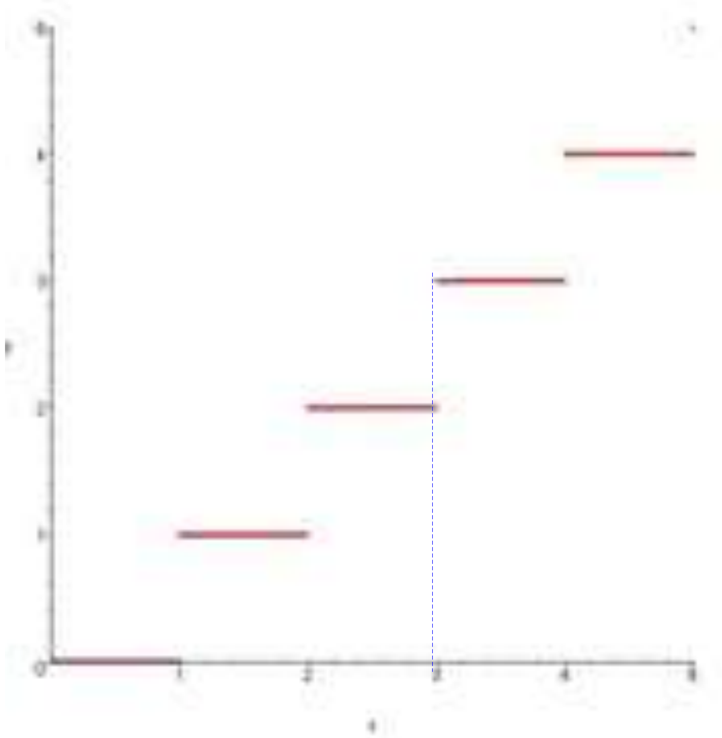
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



x	(sin x)/x
1	0,841471
0,1	0,998334
0,01	0,999983
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	0,999983
-0,1	0,998334
-1	0,841471

Limit Fungsi: Pengertian

- **Contoh.** *Carilah* $\lim_{x\to 3} \lfloor x \rfloor$

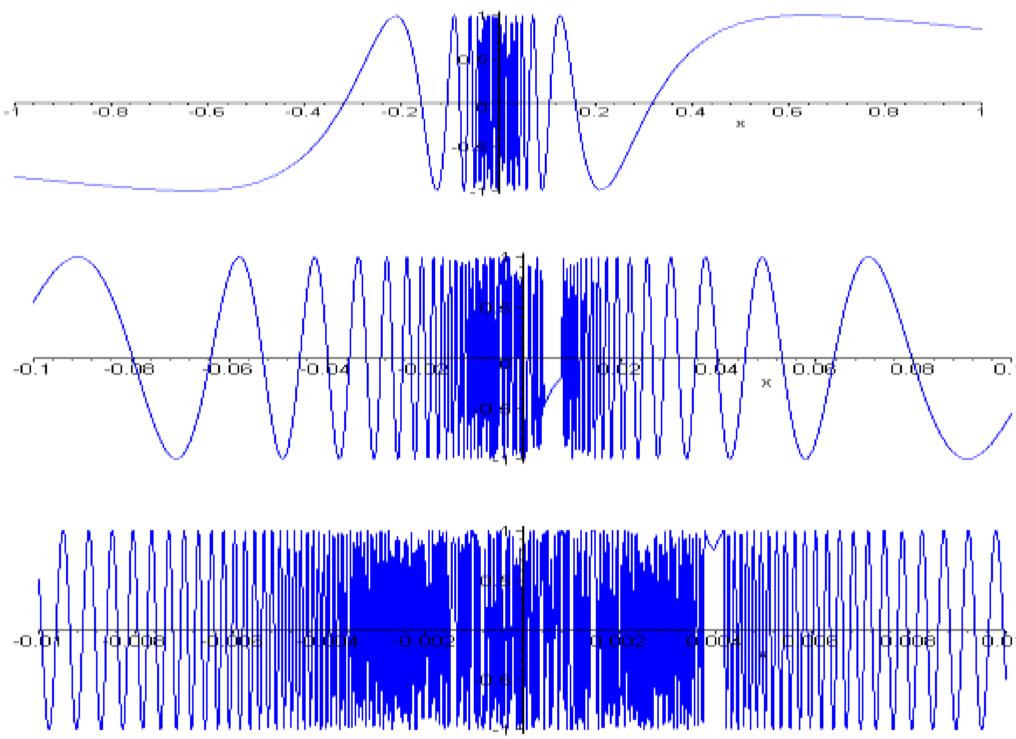


$\lim_{x\to 3} \lfloor x \rfloor$ tidak ada

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Contoh** *Carilah* $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \text{ tidak ada}$$



x	$\sin \frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	-1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	-1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	-1
$2/(12\pi)$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Teorema.** Teorema limit utama

1.	$\lim_{x\to c} k = k$, *k adalah konstanta*
2.	$\lim\limits_{x\to c} x = c$
3.	$\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$, *k adalah konstanta*
4.	$\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$
5.	$\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$
6.	$\lim\limits_{x\to c}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) . \lim\limits_{x\to c} g(x)$
7.	$\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, *asalkan* $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$
8.	$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$, *n bilangan bulat*
9.	$\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, *asalkan* $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ *jika n genap.*

Limit Fungsi: Pengertian

- **Teorema.** Substitusi

  Jika f fungsi polinomial dan fungsi rasional maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

  asalkan f(c) terdefinisi

Limit Fungsi: Pengertian

- **Contoh** *Carilah* $\lim_{x\to 3} \dfrac{x+5}{x^2-2x+6}$

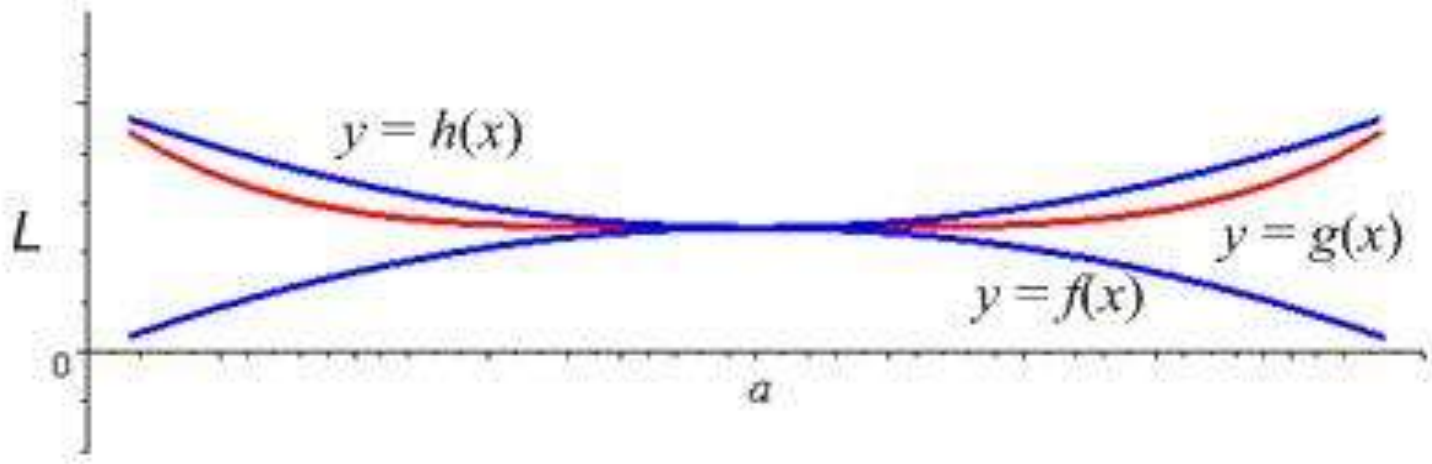
- **Contoh** *Carilah* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

- **Contoh** *Carilah* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Teorema.** ***Squeeze atau sandwich***

  Misalkan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *untuk semua x dekat c, kecuali mungkin pada* $x = c$. *Jika* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, *maka* $\lim_{x\to c} g(x) = L$.



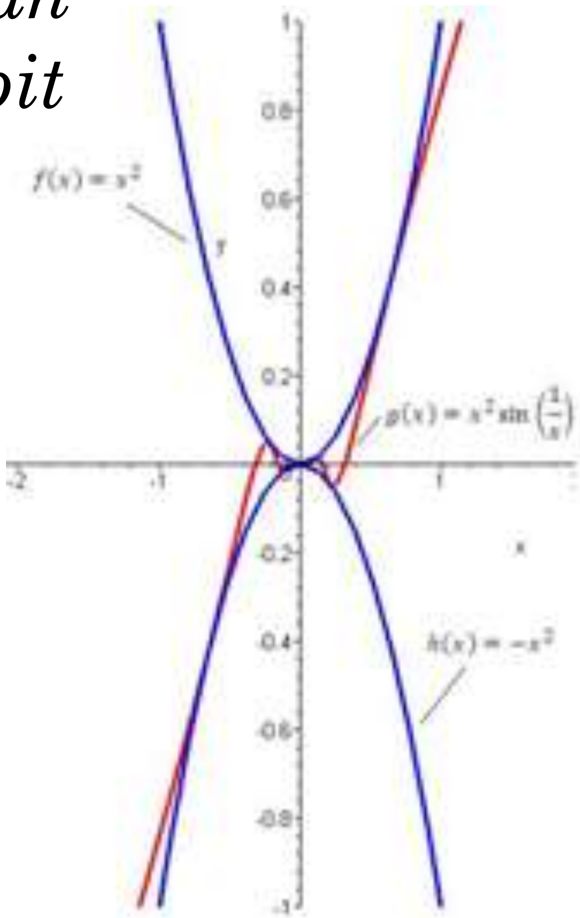
LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Contoh.** *Carilah limit dari* $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *untuk x mendekati 0 dengan menggunakan Teorema Apit*

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

$$-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Definisi.** **Limit kiri dan kanan**

  Dikatakan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ *apabila ketika x dekat dari kiri c, maka f(x) dekat dengan L.*

  Dikatakan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ *apabila ketika x dekat dari kanan c, maka f(x) dekat dengan L.*

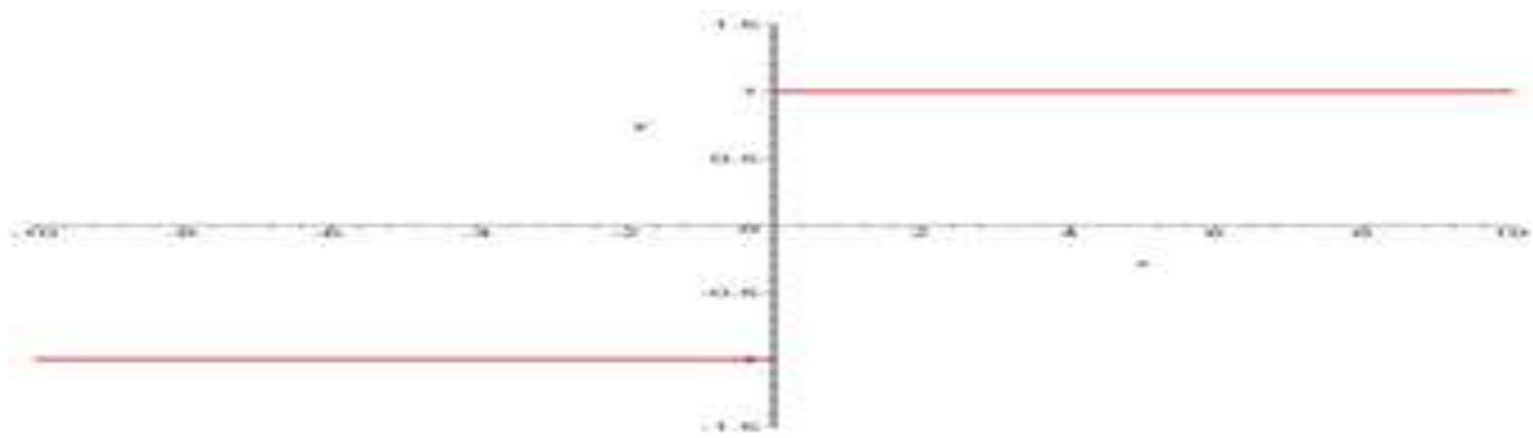
- **Teorema.** $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *jika dan hanya jika* $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ *dan* $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Contoh.** *Carilah* $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \text{ tidak ada}$$



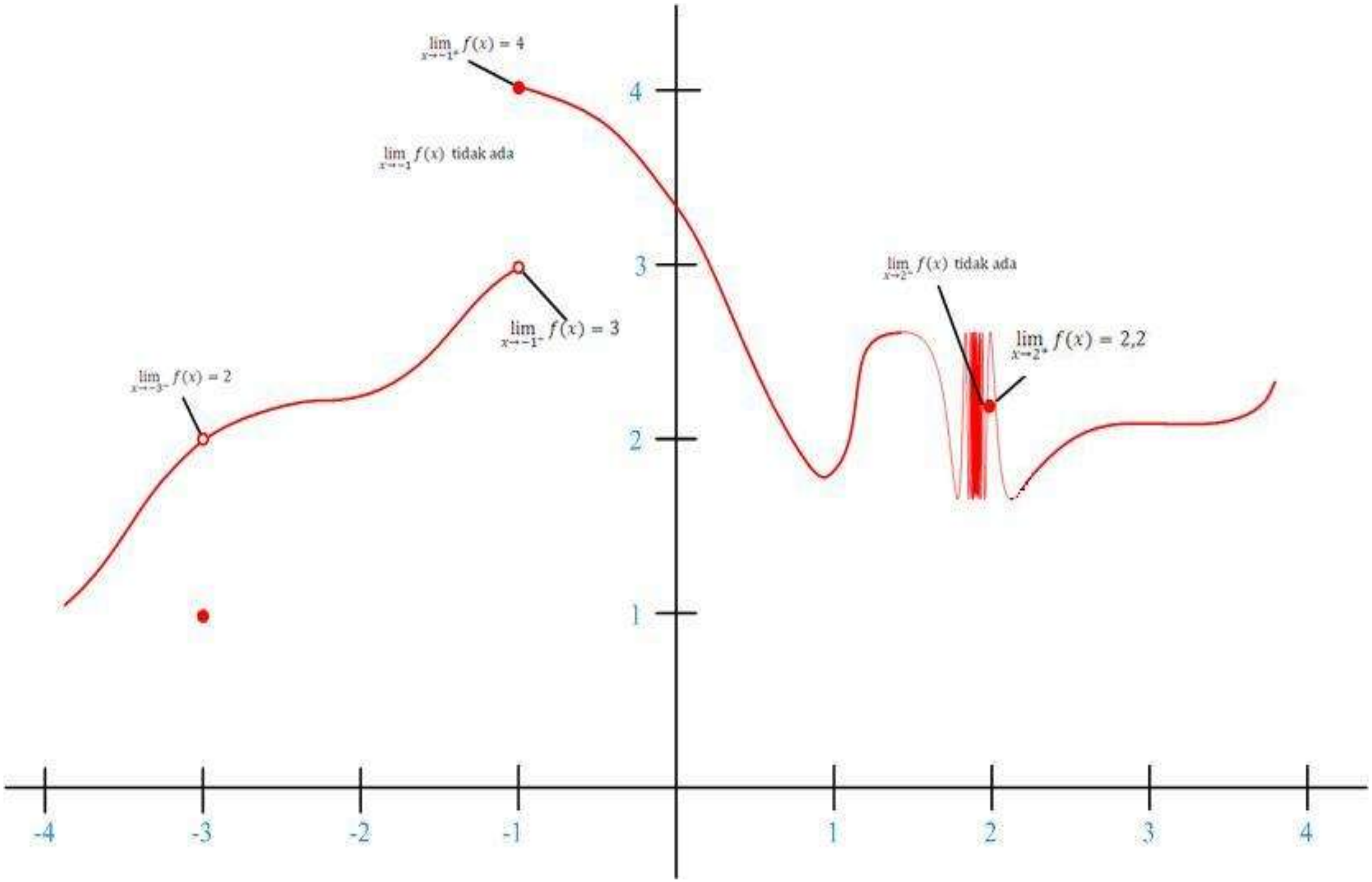
LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN

- **Contoh.** *Diberikan*

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 5, & x < 0 \\ 6 - x^2, & 0 < x < 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

Carilah limit f(x) untuk x mendekati 0 dan untuk x mendekati 2.

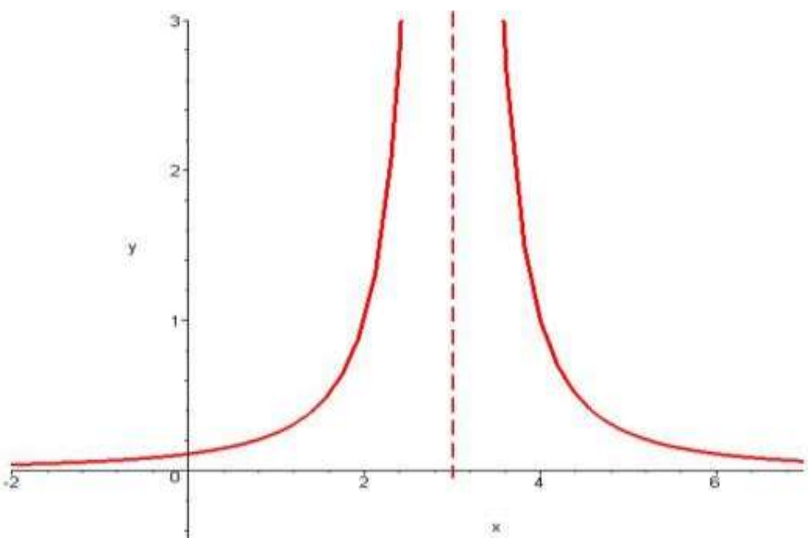
LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN



LIMIT FUNGSI: LIMIT TAKHINGGA

- Diberikan $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$
  - $f(x)$ tidak terdefinisi di $x = 3$
  - Apakah $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$ ada?

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$$



x	f(x)
2,9	10
2,99	100
2,999	1000
2,9999	10000
↓	↓
3	?
↑	↑
3,0001	10000
3,001	1000
3,01	100
3,1	10

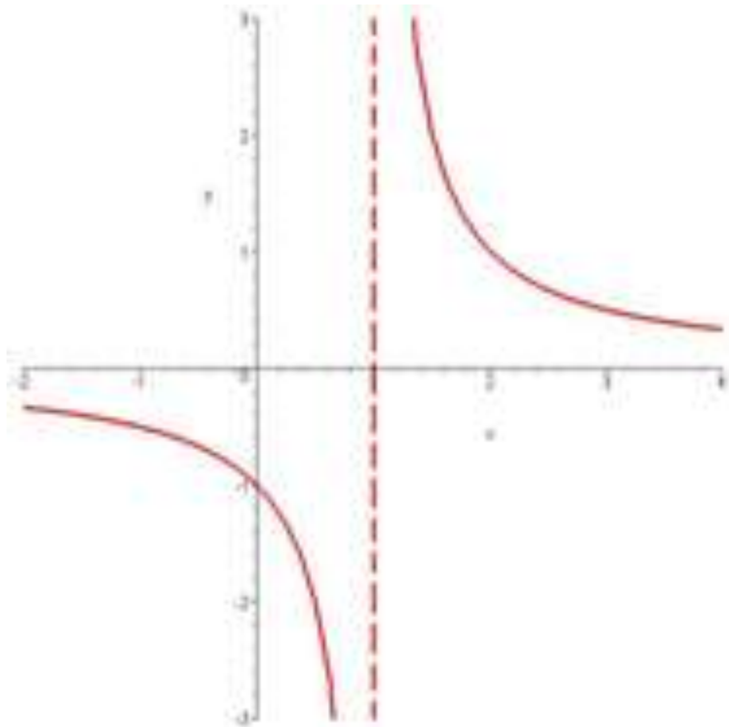
LIMIT FUNGSI: LIMIT TAKHINGGA

- **Contoh.** *Carilah* $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$, *jika ada.*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

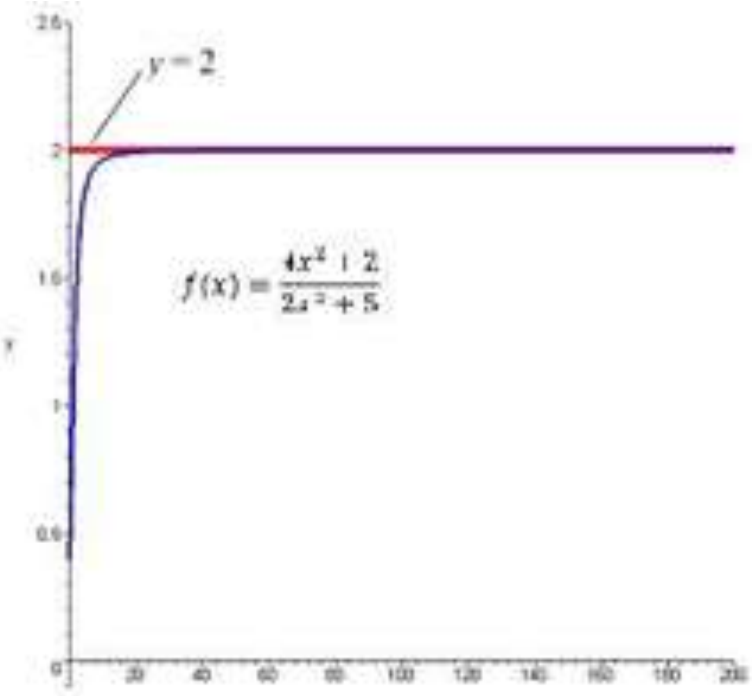
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \text{ tidak ada}$$



Limit Fungsi: Limit di takhingga

- Carilah nilai kemana fungsi $f(x) = \dfrac{4x^2+2}{2x^2+5}$ semakin mendekat ketika x semakin besar



$$f(x) = \frac{4x^2+2}{2x^2+5} = \frac{4+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}}$$

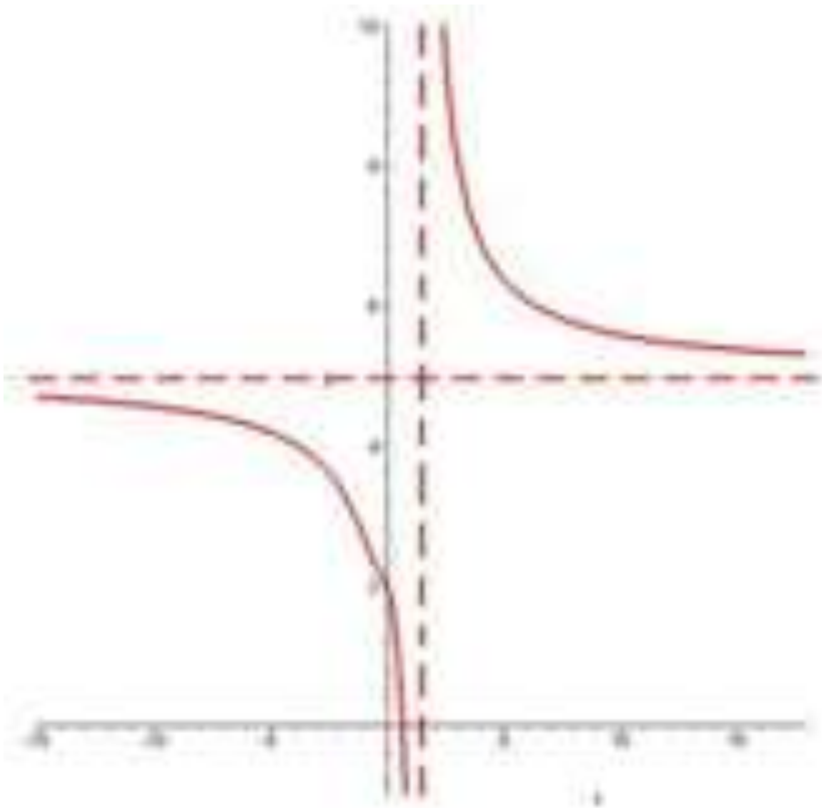
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2}{2x^2+5} = 2$$

LIMIT FUNGSI: LIMIT DI TAKHINGGA

- **Contoh.** *Carilah* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3+x-2}{x^3-x^2-1}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3+x-2}{x^3-x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}} = 5$$



Limit Fungsi Trigonometi

1.	$\lim_{t \to c} \sin t = \sin c$
2.	$\lim_{t \to c} \cos t = \cos c$
3.	$\lim_{t \to c} \tan t = \tan c$
4.	$\lim_{t \to c} \cot t = \cot c$
5.	$\lim_{t \to c} \sec t = \sec c$
6.	$\lim_{t \to c} \csc t = \csc c$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETI

- **Contoh.** *Carilah*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{t} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{\tan t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{t} = \lim_{t\to 0} 5\,\frac{\sin 5t}{5t} = 5\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{5t} = 5.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{\tan t} = \lim_{t\to 0}\frac{2\,\frac{\sin 2t}{2t}}{\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}} = \frac{2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}\right)} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2.$$

Limit Fungsi: Pengertian matematis

- **Definisi.** **Pengertian tepat limit**

  Fungsi f(x) mempunyai limit L untuk x mendekati c jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, dapat ditemukan suatu $\delta > 0$ sehingga

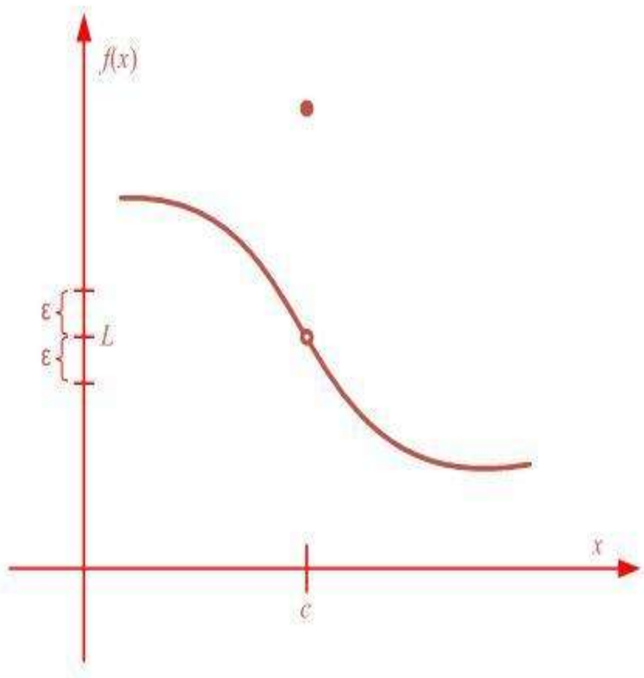
$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ apabila } 0 < |x - c| < \delta$$

  artinya,

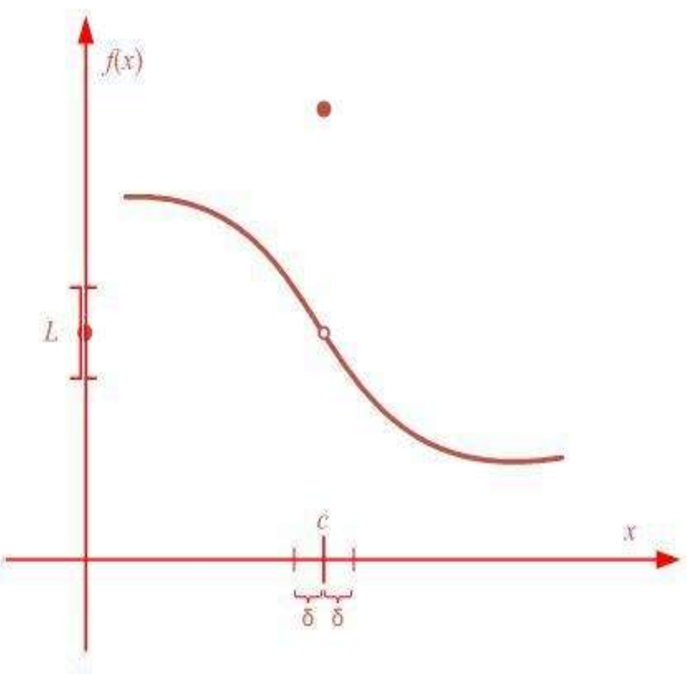
$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN MATEMATIS

- *diberikan sembarang* $\varepsilon > 0$

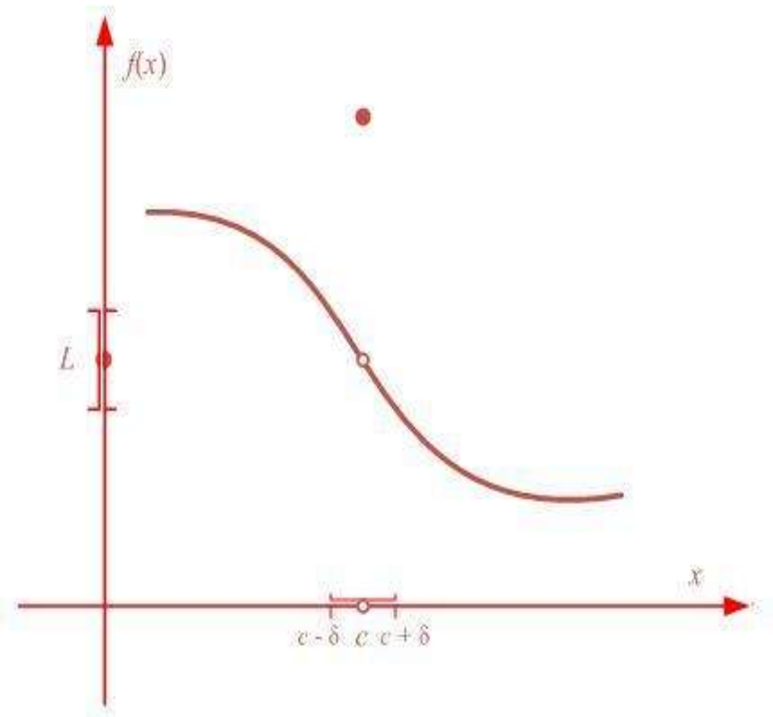


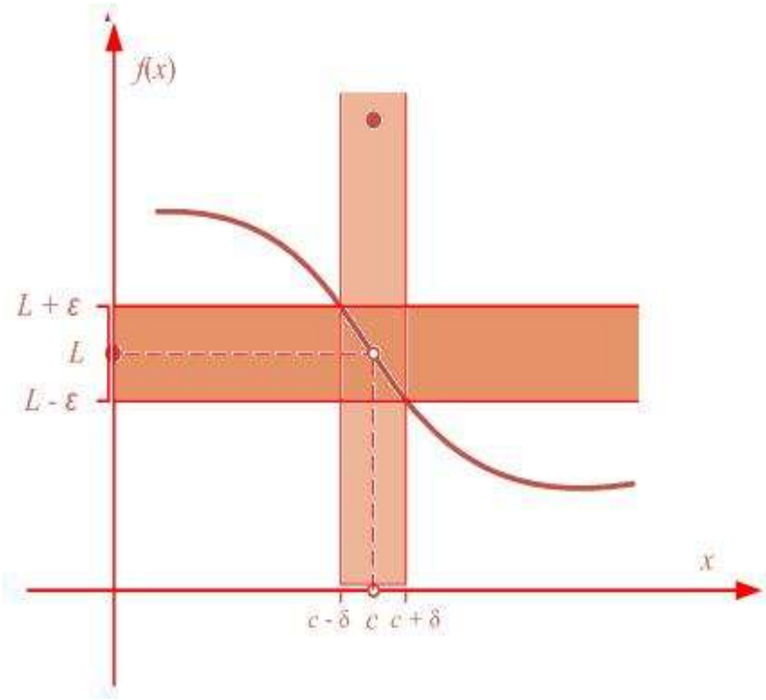
- *dapat ditemukan suatu* $\delta > 0$



LIMIT FUNGSI: PENGERTIAN MATEMATIS

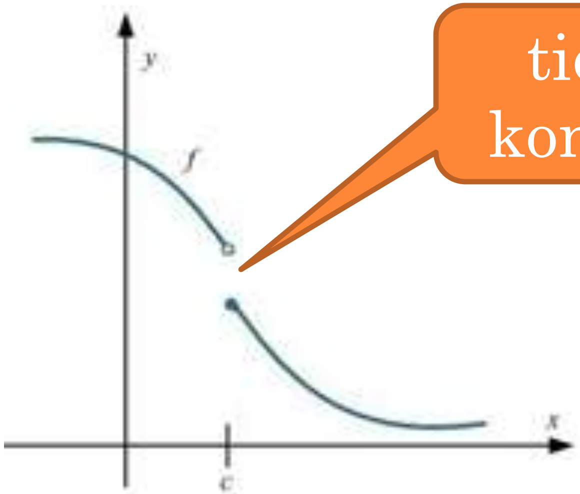
$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < |x - c| < \delta$$





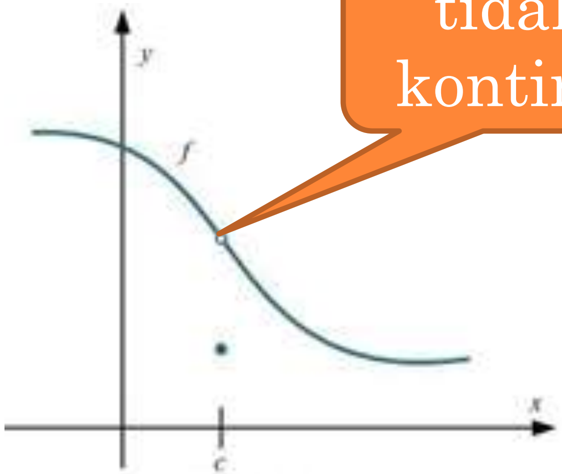
Kekontinuan Fungsi

KEKONTINUAN FUNGSI



$\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

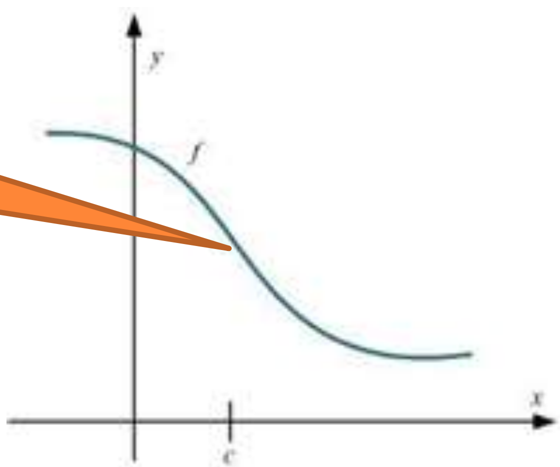
tidak kontinu



$\lim_{x \to c} f(x)$ ada, tetapi
$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

tidak kontinu

kontinu



$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

KEKONTINUAN FUNGSI

- **Definisi.** **Kontinuitas pada titik**

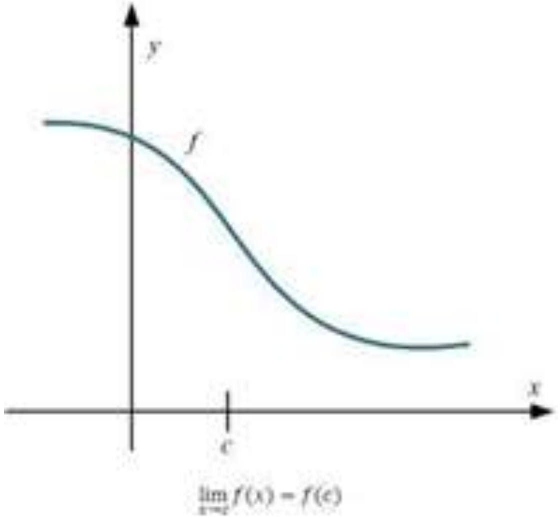
  Misalkan f terdefinisi pada interval terbuka yang mengandung c. Kita katakan f kontinu pada c jika $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

- Definisi ini mensyaratkan 3 hal:

  $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

  $f(c)$ ada

  $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$



Kekontinuan Fungsi

- **Contoh.** *Periksalah titik diskontinu dari fungsi-fungsi berikut*

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2}$$

KEKONTINUAN FUNGSI

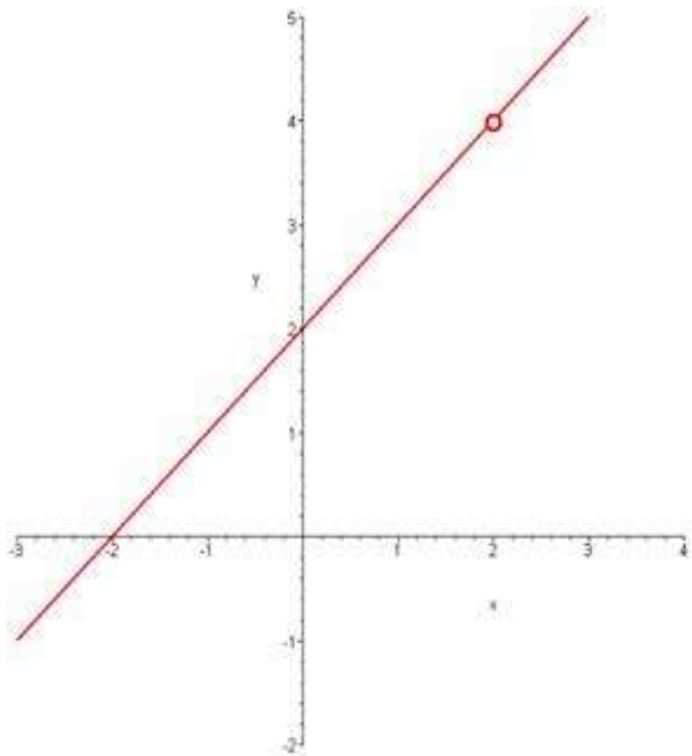
$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

- $f(x)$ tidak terdefinisi di $x = 2$
- $f(x)$ tidak kontinu di $x = 2$.
- Namun

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

- Diskontinu bisa dihapus



Kekontinuan Fungsi

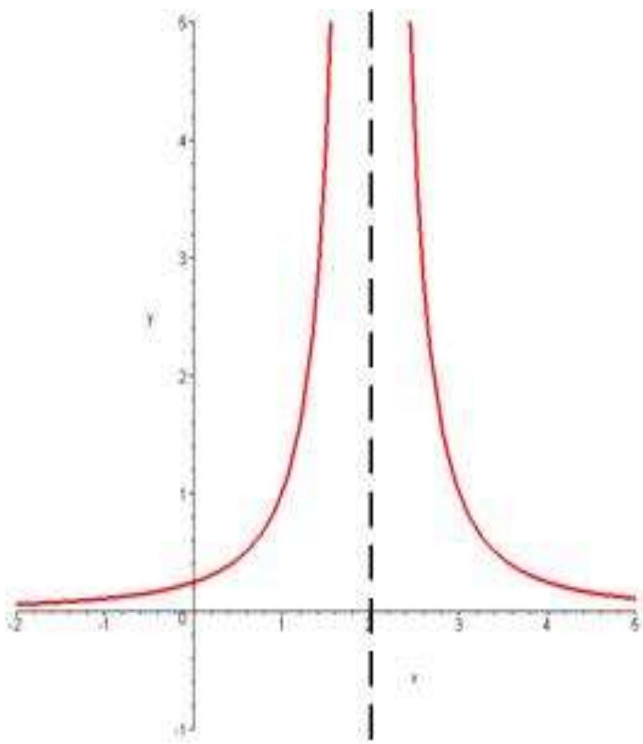
$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

- $f(x)$ tidak terdefinisi di $x = 2$
- $f(x)$ tidak kontinu di $x = 2$.
- Namun

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

- Diskontinu tiak bisa dihapus



Kekontinuan Fungsi

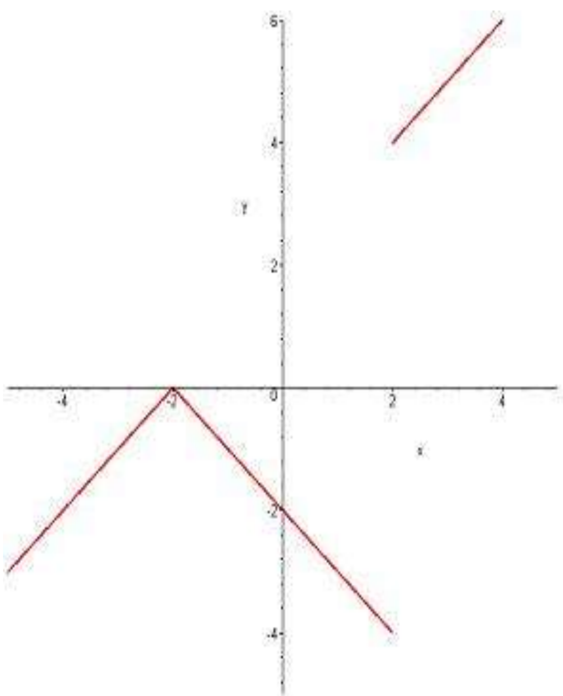
$$f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2}$$

- $f(x)$ tidak terdefinisi di $x = 2$
- $f(x)$ tidak kontinu di $x = 2$.
- Namun

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

- Diskontinu tidak bisa dihapus



Kekontinuan Fungsi

- **Teorema.** **Teorema nilai antara**

  Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada [a, b] dan y_0 adalah suatu bilangan dengan $a < y_0 < b$. Jika f kontinu pada [a, b], maka pasti ada paling sedikit satu c dengan $a < c < b$ sehingga $f(c) = y_0$.